Kleine AG
Stabilitätsbedingungen

am 18.07.2009 in Bonn

Organisatoren:
Heinrich Hartmann (hartmann@math.uni-bonn.de),
Christian Lehn (clehn@mathematik.uni-mainz.de)

1. Einleitung

Stabilitätsbedingungen sind ein Analogon des (GIT-)Stabilitätsbegriffs für Vektorbündel/ Garben auf triangulierten Kategorien. Sie wurden von Bridgeland in [4] eingeführt und sind motiviert durch physikalische Überlegungen von Douglas (Π-Stabiliy of BPS-Branes).
Eine herausragende Neuerung ist die Betrachtung nicht einer, sondern aller Stabilitätsbedingungen gleichzeitig. Es stellt sich heraus, dass diese Menge $Stab(\mathcal{D})$ die struktur einer komplexen Manigflaltigkeit trägt, die auf diese Weise jeder triangulierten Kategorie $\mathcal{D}$ zugeordnet werden kann. Die geometrischen Eigenschaften des Raumes messen daher auf subtile Art die homologischen Eigenschaften der Kategorie.
Besonders interessant sind Stabilitätsbedingungen auf der derivierten Kategorie von Kohärenten Garben $\mathcal{D}^b(X)$ einer algebraischen Varietät X. Aus physikalischer Sicht soll $Stab(\mathcal{D}^b(X))$ der "Stringy-Kähler"-Modulraum sein, Mirror-dual zum Modulraum komplexer Strukturen.
Außerdem interessiert man sich für Automorphismen der derivierten Kategorie. Die Gruppe $Aut(\mathcal{D}^b(X))$ wirkt auf $Stab(\mathcal{D}^b(X))$ und es wird vermutet, dass eine enge Beziehung zwischen der Fundamentalgruppe von $Stab(\mathcal{D}^b(X))$ und den Autoequivalenzen $Aut(\mathcal{D}^b(X))$ besteht.
Die gesamte Theorie ist noch nicht sehr alt (2002), vielleicht sind auch deshalb noch viele wichtige Fragen ungeklärt (z.B. Existenz von Stabilitätsbedingungen auf 3-dimensionalen Calabi-Yau Manigfaltigkeiten). Trotzdem gibt es einige Fälle, in denen $Stab(\mathcal{D})$ im Wesentlichen bekannt ist. Wir konzentrieren uns in der kleinen AG daher darauf diese Beispiele vorzustellen. Auch lassen wir physikalischen Aspekte außen vor (siehe bei Interesse Abschnitt 1 in [5]).
Wir müssen von den Teilnehmern diesmal leider etwas mehr Vorkenntisse verlangen, als normalerweise üblich. Triangulierte und derivierte Kategorien kann man nicht vernünftig in einer halben Stunde erklären. Wer mit der Theorie nicht gut vertraut ist, hilft vielleicht in Blick in den Artikel "Derived Categories for the Working Mathematician" von R. Thomas [11].

2. Das Programm

1. Vortrag (55 Min.): Stabilitätsbedingungen. (Kapitel 3 in [5], ferner [4], Kapitel 3,5 bis 8)
Wir werden uns an [5], Kapitel 3 orientieren, allerdings ist [4] die grundlegendere Referenz, da man für die Beweise häufig Argumente und Definitionen braucht, die in [5] verschwiegen werden. Es wäre nett, an die Definition einer triangulierten Kategorie zu erinnern (z.B. [7], Definition 1.32, S. 11). Von den dort aufgeführten Axiomen sind höchstens **TR1** iii) und **TR2** interessant. Nun sollte der Begriff der beschränkten T-Struktur sowie deren Herz eingeführt werden (Definition 3.1 in [4]). Eine *Stabilitätsbedingung* (Definition 3.1 in [5]) auf einer triangulierten Kategorie $\mathcal{D}$ ist ein Paar $\sigma = (Z, \mathcal{P})$, wo $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$ ein *Slicing*[1] (Definition

[1] hierfür war es uns nicht möglich einen seriösen deutschen Begriff zu finden

3.3 in [4]) und $Z : K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ ein Gruppenhomomorphismus ist zuzüglich mancher Axiome. Um Beispiele zu bekommen, beweist man Proposition 5.3 in [4] und diskutiert sodann das anschließende Beispiel 5.4. Danach die Phasen $\phi^{\pm}_{\sigma}(E)$ und die Masse $m_{\sigma}(E)$ erläutern und lokal endliche Stabilitätsbedingungen definieren (Abschnitt 3.1 in [5]). Nun können wir die Metrik auf Slice$\mathcal{D}$, dem Raum aller Slicings von $\mathcal{D}$ aus [4], Kapitel 6 vorstellen. Sie liefert zusammen mit den Normen $\|\cdot\|_{\sigma}$ für eine Stabilitätsbedingung $\sigma = (Z, P) \in \mathrm{Stab}\mathcal{D}$ eine Topologie auf

$$\mathrm{Stab}\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Slice}\mathcal{D} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C}).$$

Diese soll in [4], Proposition 6.3 kulminierend erklärt werden.
Als nächstes Stab(X) für eine projektive Varietät X definieren ([5], Definition 3.6). Das Hauptinteresse gilt nun Theorem 3.5 in [5] (vgl. [4], Theorem 1.2 und Korollar 1.3). Hierfür müsste man [4], Theorem 7.1 beweisen, worauf wir wahrscheinlich aus Zeitgründen verzichten müssen. Es sollte allerdings angeschrieben, die Bedingung an W erklärt werden und skizziert werden, wie damit Satz 3.5 folgen würde und insbesondere warum Stab$X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Zum Schluss kann man die Metrik $d(\sigma_1, \sigma_2) \in [0, \infty]$ angeben ([5], Abschnitt 3.2) um zu zeigen, dass die Topologie von Stab$X$ intrinsisch ist.

2. Vortrag (35 Min.): Das Beispiel der elliptischen Kurve. (Kapitel 4 in [5], ferner [4] Kapitel 8,9)
In [4] berechnet Bridgeland Stab(C) für eine glatte projektive Kurve C mit $g(C) = 1$. Für eine triangulierte Kategorie $\mathcal{D}$ eixistiert stets eine Rechtswirkung $\mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \circlearrowleft \widetilde{\mathrm{GL}}^+_2(\mathbb{R})$ der universellen Überlagerung der positiv orientierten linearen Automorphimen von $\mathbb{R}^2$. Ferner existiert eine Linkswirkung $\mathrm{Aut}\mathcal{D} \circlearrowright \mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ ([4], Lemma 8.2 mit Beweis vorführen). Im Falle der elliptischen Kurve C ist die Wirkung von $\widetilde{\mathrm{GL}}^+_2(\mathbb{R})$ frei und transitiv. Somit ist

$$\mathrm{Stab}(C) \cong \widetilde{\mathrm{GL}}^+_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{H}.$$

Kapitel 9 in [4] sollte vollständig diskutiert werden, wobei wir auch unsere erste echte Stabilitätsfunktion

$$Z(E) = -\deg E + i\mathrm{rk}E$$

kennenlernen. Ferner gilt für die Wirkung von $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}^b(C))$ auf Stab(C), dass

$$\mathrm{Stab}(C)/\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) \cong \widetilde{\mathrm{GL}}^+_2(\mathbb{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Hierfür muss eventuell auf [9] zurückgegriffen werden, vielleicht kann man die benötigten Resultate für elliptische Kurven aber auch "'zu Fuß"' beweisen. Insgesamt ist der Vortrag am wenigsten dicht gepackt und die Resultate sollten entsprechend detailliert vorgeführt werden.

3. Vortrag (45 Min.): Generische Tori. ([8])
Nachdem wir Stabilitätsbedingungen für elliptische Kurven betrachtet haben gehen wir nun weiter zu höher-dimensionalen Tori. Die Grundlage hierzu liefert die Arbeit von S. Meinhardt [8], in der Stabilitätsbedingungen im generischen Fall klassifiziert werden.
Auf Seite 2 findet man hier ein sehr schönes Bild dieses Raumes. Ziel des Vortrages ist es dieses Bild zu verstehen.
Zunächst soll die Definition eines generischen Torus zusammen mit den unmittelbaren geometrischen Konsequenzen erläutert werden (S.3f). Besonders wichtig ist dabei Prop. 2.5 die besagt, dass reflexive Garben bereits lokal frei sind.
Wie im ersten Vortrag erläutert wurde, wird eine Stabilitätsbedingung duch eine t-struktur und eine Stabilitätsfunktion auf ihrem Herz charakterisiert. Um an interessante t-strukturen zu kommen kippen wir die Standard t-Struktur mehrfach entlang von Torsionstheorien. Diese Technik soll kurz erklärt werden, sowie die Verschiedenen t-strukturen die dabei verwendet werden.

Wir erhalten so eine Folge von Herzen: $Coh(X)_{(0)}, \ldots, Coh(X)_{(p)}$ auf denen wir Stabilitätsfunktionen definieren können: $Z_{(p)}$ in Cor 3.6 und $Z^{\gamma}_{(p)}$ in Cor 3.8.

Die zugehörigen $\widetilde{GL(2,\mathbb{R})}$-orbits umfassen alle Stabilitätsbedingungen mit der Eigenschaft, dass Punktgarben $k(x)$ stabil sind. (Prop. 3.11. zitieren).
Nun wollen wir noch verstehen, warum das die Orbits wie auf Seite 2 dargestellt zusammenhängen. Dies wird in Kapitel 4 erklärt: Die äußeren Wände werden durch Prop. 4.2 charakterisiert, im Beweis von Satz 4.4. findet sich die genaue Beschreibung des Klebevorgangs. Es ist sicher nicht möglich alle Details zu geben. Die Hauptideen sollten allerdings erklärt werden.

4. Vortrag (45 Min.): K3-Flächen. ([3])
K3-Flächen sind ein weiteres Beispiel in dem der Raum der Stabilitätsbedingungen bekannt ist (zumindest eine Komponente). In diesem Vortrag wollen wir dieses Resultat von Bridgeland [3] vorstellen. Da ein Beweis zu kompliziert wäre, begnügen wir uns damit das Resultat zu erklären und ein Beispiel einer Stabilitätsbedingung zu konstruieren.
Damit wir Theorem 1.1 formulieren können muss zunächst die Theorie aus der Einleitung S.1-4 wiederholt/besprochen werden. Dabei setzen wir die klassischen Resultate über K3-Flächen wie man sie zum Beispiel bei Beauville et. al. [6] findet voraus.
Es stellt sich heraus, dass das gar keine leichte Aufgabe ist eine Stabilitätsbedingung anzugeben. Die Standard t-Struktur mit Herz $Coh(X) \subset \mathcal{D}^b(X)$ besitzt nämlich gar keine Stabilitätsfunktion, sondern muss erst gekippt werden.
Wir stellen zunächst kurz die Resultate über Garben auf K3-Flächen aus Abschnitt 5 vor, (Beweise von 5.1 und 5.2 können weggelassen werden) damit danach die Konstruktion der Stabilitätsbedingung aus Abschnitt 6 erklärt werden kann (Lemma 6.2). Hier wäre es gut ausführliche Beweise zu sehen.
Der ambitionierte Vortragende kann auch gerne einen Blick in Abschnitt 7 werfen, wo die Hader-Narasimhan-Eigenschaft nachgewisen wird.

5. Vortrag (45 Min.): Nicht kompakte Calabi-Yau Beispiele. (Kapitel 6 in [5], ferner [1], [2])
Da man nur spärliche Informationen über kohärente Garben auf höherdimensionalen projektiven Varietäten hat, ist es naheliegend sich quasiprojektive Beispiele anzuschauen. Dazu betrachten wir eine Fanovarietät Z und den Totalraum ihres kanonischen Bündels $\pi : X = \omega_Z \to Z$ sowie eine *außergewöhnliche Ansammlung*[2] $(E_0, .., E_{n-1}) \subseteq \mathcal{D}^b(Z)$ (Kapitel 3 in [1]). Wir setzen $B := \mathrm{End}_X(\bigoplus_i \pi^* E_i)$ und betrachten

$$\mathrm{Hom}_X(\bigoplus_i \pi^* E_i, \_) : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{Mod} B) \tag{1}$$

Den Beweis, dass dies eine Äquivalenz von Kategorien ist, im Detail vorführen ([1], Proposition 4.1). Dazu muss eventuell auf [10], Theorem 6.4 zurückgegriffen werden.
Es soll nun möglichst viel aus den Beispielen 6.1, 6.2 in [5] besprochen werden, ab hier ist es wahrscheinlich nicht mehr möglich alles zu beweisen, statt dessen wollen wir einfach einen strukturellen Überblick geben. Die Gestalt der Algebra B (Beispiel 6.1 in [5]) wäre interessant. Hierzu sollte man noch einmal erklären, was ein Köcher und seine Pfadalgebra sind.
Als nächstes widmen wir uns dem Beispiel $Z = \mathbb{P}^2$. Hier kann man eine offene Teilmenge von $\mathrm{Stab}^0(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ beschreiben, wobei $\mathcal{D}$ die volle Unterkategorie von Komplexen mit Träger im Nullschnitt $Z \subseteq X$ enthalten bezeichnet. Nach [5], Theorem 6.3 bzw. [2],

[2]frei aus dem Englischen von *exceptional collection*

Theorem 1.1 ist

$$\mathrm{Stab}^0(\mathcal{D}) = \coprod_{g \in G} U_g \tag{2}$$

wobei

$$G = B_3 = \langle \tau_0, \tau_1, \tau_2 : \tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j \forall i, j \rangle$$

die affine Zopfgruppe auf drei Strängen ist. Man sollte die Zopfgruppe und ihre Wirkung erklären, ferner wie die Abschlüsse der Regionen U_g für verschiedene $g \in G$ sich schneiden. Bis auf (1) soll der Vortrag eher Reportcharakter haben, d.h. wir verzichten auf Beweise und präsentieren dafür detailliert und übersichtlich die Struktur der Aussagen. Dabei fassen wir im Wesentlichen Kapitel 1 und 2 aus [2] zusammen, wobei wir eventuell Kapitel 2 und 3 aus [1] zu Rate ziehen (dort findet man z.B. die Definitionen von starken, vollen,... außergewöhnlichen Ansammlungen, Mutationen etc.). Ferner sollte ein Schwerpunkt die Aussage von (2) sein. Es empfiehlt sich, dass der Vortragende einen guten darstellungstheoretischen Hintergrund mitbringt.

References

[1] Tom Bridgeland. t-structures on some local Calabi-Yau varieties. *J. Algebra*, 289(2):453–483, 2005.

[2] Tom Bridgeland. Stability conditions on a non-compact Calabi-Yau threefold. *Comm. Math. Phys.*, 266(3):715–733, 2006.

[3] Tom Bridgeland. Stability conditions on k3 surfaces, arxiv:math.ag/0307164v2, 2006.

[4] Tom Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *Ann. of Math. (2)*, 166(2):317–345, 2007.

[5] Tom Bridgeland. Spaces of stability conditions. Abramovich, D. (ed.) et al., Algebraic geometry, Seattle 2005. Proceedings of the 2005 Summer Research Institute, Seattle, WA, USA, July 25–August 12, 2005. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 80, Pt. 1, 1-21 (2009)., 2009.

[6] Beauville Bourguignon Demazure. *Géométrie des surfaces $K3$: modules et périodes.* Société Mathématique de France, Paris, 1985. Papers from the seminar held in Palaiseau, October 1981–January 1982, Astérisque No. 126 (1985).

[7] D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006.

[8] Sven Meinhardt. Stability conditions on generic complex tori, arxiv:math.ag/0708.3053v2, 2007.

[9] Shigeru Mukai. Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves. *Nagoya Math. J.*, 81:153–175, 1981.

[10] Jeremy Rickard. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc. (2)*, 39(3):436–456, 1989.

[11] Richard Thomas. Derived categories for the working mathematician (arxiv:math/0001045v2), 2000.