Prof. Dr. M. Rapoport
Oberseminar WS 2003/04

Schnitte von modularen Korrespondenzen

Programmvorschlag von U. Görtz

1 Lubin-Tate-Gruppen (1 Sitzung)

Die Teilnehmer des Seminars sollten mit dem Begriff des formalen Gruppengesetzes bereits vertraut sein. In diesem Vortrag soll das Beispiel der Lubin-Tate-Gruppen vorgestellt werden. Der Vortrag sollte im wesentlichen den Inhalt von [LT1] abdecken. Siehe auch [N] V §5, [S] §3.

2 Formale Modulräume eindimensionaler formaler Gruppen (1 Sitzung)

Hier soll die Arbeit [LT2] behandelt werden. Siehe auch [D] §4.

3 Kanonische und quasi-kanonische Lifts (2–3 Sitzungen)

In diesem Themenblock geht es um die Arbeit [G] von Gross. Wir benutzen die Ergebnisse der ersten beiden Vortraẽge, um gewisse Lifts formaler A-Moduln zu definieren und zu beschreiben. Die von Gross benutzten Bezeichnungen sind teilweise etwas verwirrend und sollten möglichst im Vortrag geschickter gewählt werden.

Im späteren Verlauf des Seminars sind für uns insbesondere die Propositionen 3.3 und 5.3 von Bedeutung.

Zum besseren Verständnis ist sicherlich die Analogie zum zyklotomischen Fall hilfreich, die Gross im §6 anspricht. Diese sollte in den Vorträgen ausführlicher erklärt werden.

4 Liftung von Endomorphismen formaler A-Moduln (2 Sitzungen)

Wir behandeln nun Keating's Arbeit [K2] In den späteren Vorträgen brauchen wir (nur) Theorem 5.1 aus [K2]. Für dessen Beweis wird im wesentlichen auf [K1] verwiesen.

5 Modulare Polynome (klassische Ergebnisse) (1–2 Sitzungen)

In diesem Block sollen die klassischen Resultate über modulare Polynome aus [GK] §§1, 2 erklärt werden. Für weitere Referenzen siehe [GK].

6 Schnitte modularer Korrespondenzen nach Gross–Keating (5 Sitzungen)

Nun kommen wir zum eigentlichen Thema des Oberseminars. Das Ziel ist Proposition 3.22 in [GK], in der die Schnittzahl dreier zu modularen Polynomen gehöriger Divisoren auf $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[j, j']$ angegeben wird, und die Bestimmung der dort auftretenden lokalen Invarianten $\alpha_p(Q)$, $\beta_\ell(Q)$ (für gewisse quadratische Formen Q).

Dieser Block läßt sich wie folgt grob unterteilen:

- [GK] §3. Wir klären zunächst, wann die Schnittzahl überhaupt endlich ist, und zeigen, daß sie in diesem Fall die in Prop. 3.22 gegebene Form haben muß.
- [GK] §4. Wir definieren Invarianten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ eines dreidimensionalen quadratischen Raums (L, Q) über $\mathbb{Z}_\ell$. Später werden wir die Invarianten α_p und β_ℓ in Termen der a_i ausdrücken.
- Die Bestimmung von α_p führt auf ein Deformationsproblem von Isogenien elliptischer Kurven. Wir benutzen nun Serre-Tate-Theorie (als 'black box'), um dieses Problem auf ein Deformationsproblem von Isogenien formaler Gruppen zurückzuführen.
- Außerdem müssen wir noch etwas über die lokale Gestalt der speziellen Faser des Modulraums der Isogenien elliptischer Kurven wissen. [KM] Theorem 13.4.6.
- [GK] §5. Nun können wir die Invariante $\alpha_p(Q)$ berechnen (Proposition 5.4).
- [GK] §6. Schließlich berechnen wir noch die Invarianten $\beta_\ell(Q)$.

Literatur

[D] V. Drinfeld, *Elliptic modules*, Math. USSR Sbornik **23** (1974), No. 4, 561–592.

[G] B. H. Gross, *On canonical and quasi-canonical liftings*, Invent. math. **84** (1986), 321–326.

[GK] B. H. Gross, K. Keating, *On the intersection of modular correspondences*, Invent. math. **112** (1993), 225–245.

[GH1] B. H. Gross, M. J. Hopkins, *Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space*, Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992), Contemp. Math. **158**, pp. 23–88, Amer. Math. Soc. 1994.

[GH2] B. H. Gross, M. J. Hopkins, *The rigid analytic period mapping, Lubin-Tate space, and stable homotopy theory*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **30** (1994), no. 1, 76–86.

[K1] K. Keating, *Lifting endomorphisms of formal groups*, Ph. D. thesis, Harvard 1987.

[K2] K. Keating, *Lifting endomorphisms of formal A-modules*, Compos. Math. **67** (1988), 211–239.

[KM] N. Katz, B. Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Ann. of Math. Studies **108**, Princeton Univ. Press 1985.

[LT1] J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. Math. **81** (1965) 380–387.

[LT2] J. Lubin, J. Tate, *Formal moduli for one-parameter formal Lie groups*, Bull. Soc. math. France **94** (1966), 49–60.

[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag 1992.

[S] J.-P. Serre, *Local class field theory*. In: J. W. S. Cassels, A. Fröhlich (eds.), Algebraic Number Theory, Academic Press 1967.

[Y] J.-K. Yu, *On the moduli of quasi-canonical liftings*, Compositio Math. **96** (1995), no. 3, 293–321.