Einführung in die PDGs

21.06.2019
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 28.06.2019 in der Vorlesung

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: **15 Punkte**

Sei $g \in \mathrm{C}^\infty([0,\infty))$ mit $g(0) = 0$ kompakt getragen. Leiten Sie für das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0 & \text{auf } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{auf } \{t = 0\} \times (0,\infty), \\ u = g & \text{auf } [0,\infty) \times \{x = 0\} \end{cases}$$

die Darstellungsformel

$$u(t,x) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s) \, \mathrm{d}s$$

her.

Hinweis: Definieren Sie $v(t,x) := u(t,x) - g(t)$ und setzen Sie v auf $\{x > 0\}$ via ungerade Reflektion fort.

Aufgabe 2: **15 Punkte**

Mit der Notation der parabolischen Zylinder Ω_T nennen wir $u \in \mathrm{C}^2_1(\Omega_T)$ eine *Sublösung* der Wärmeleitungsgleichung, falls $\partial_t u - \Delta u \leq 0$ in Ω_T gilt. Zeigen Sie, dass für alle $E(t,x;r) \subset \Omega_T$ und alle Sublösungen u der Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T gilt:

$$u(t,x) \leq \frac{1}{4r^d} \iint_{E(t,x;r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y.$$

Geben Sie darauf basierend einen alternativen Beweis des Maximumsprinzip für die Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 3: Carleman I **10 Punkte**

Sei $\kappa \in \mathbb{R}$. Weiters sei $u \in \mathrm{C}^1_c(\mathbb{R})$ für gegebenes $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$u_t + \kappa u = f.$$

Indem Sie für $\tau \in \mathbb{R}$ Funktionen der Form $v = e^{\tau t} u$ betrachten, zeigen Sie, dass es ein $c > 0$ gibt mit

$$\|e^{\tau t} u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leq \frac{c}{|\kappa - \tau|} \|e^{\tau t} f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

Im Hinblick auf das kommende Übungsblatt drücken Sie für $u \in \mathrm{C}^2_c(\mathbb{R}^d)$ den Term $|x|^2 \Delta u(x)$ in Polarkoordinaten $(r,\varphi) \in (0,\infty) \times \mathbb{S}^{d-1}$ aus (siehe Lemma 2.49 im Skript) und führen Sie sodann die transformierte Variable $t = \log(r)$ ein. Geben Sie die Darstellung von $|x|^2 \Delta u(x)$ in den Koordinaten (t,φ) an.