Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

# Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 3. Woche
## Lineare Algebra 1

**Aufgabe 1.** Welche der folgenden Mengen $G$ mit Verknüpfung $\circ$ ist eine Gruppe?

(a) $(G, \circ) = (\mathbb{R}, +)$;

(b) $(G, \circ) = (\mathbb{R}, \cdot)$;

(c) $(G, \circ) = (\mathbb{R}^\times, \cdot)$, wobei $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(d) $(G, \circ) = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, wobei $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$;

(e) $(G, \circ) = (\mathbb{Z}_{>0}, \cdot)$, wobei $\mathbb{Z}_{>0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$;

(f) $(G, \circ) = ([-1, 1] \setminus \{0\}, \cdot)$.

**Aufgabe 2.** Beschreibe alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

**Aufgabe 3.** *Untergruppen der Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks*
Man betrachte die Menge $\mathcal{S}$ aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 1. Aus dem 2. Anwesenheitszettel ist bekannt, dass dies eine Gruppe ist, wobei die Verknüpfung $\circ$ durch die Komposition von Abbildungen gegeben ist. Man bestimme alle Untergruppen von $(\mathcal{S}, \circ)$.

**Aufgabe 4.** Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe (d.h. eine Gruppe mit endlich vielen Elementen) mit neutralem Element $e$.

(a) Zeige, dass es für jedes Element $x \in G$, eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, mit

$$x^n := \underbrace{x \circ \cdots \circ x}_{n-\text{mal}} = e.$$

(b) Folgere aus Teil (a), dass für jedes Element $x \in G$,

$$< x > := \{x^k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

wobei $x^0 := e$, eine Untergruppe von $(G, \circ)$ ist.

**Aufgabe 5.** Zeige, dass jede Gruppe $(G, \circ)$ mit mindestens zwei Elementen, eine abelsche Untergruppe mit mindestens zwei Elementen besitzt.

**Aufgabe 6.** *Satz von Lagrange*
Sei $H$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe $(G, \circ)$, d.h. einer Gruppe mit endich vielen Elementen. Man bezeichne mit $\mathrm{ord}(H)$ (bzw. $\mathrm{ord}(G)$) die Anzahl der Elemente von $H$ (bzw. $G$). Zeige, dass $\mathrm{ord}(H)$ ein Teiler von $\mathrm{ord}(G)$ ist.

**Bitte wenden**

**Bemerkung:** Die beiden folgenden Aufgaben haben etwas höheren Schiwerigkeitsgrad. Wenn der allgemeine Fall nicht gelingt, so sollte man die Aufgabe für spezielle endliche Gruppen, wie zB. $(G, \circ) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, behandeln.

**Aufgabe 7.** *Quadrate in abelschen Gruppen ungerader Ordnung*
Sei $(G, \circ)$ eine endliche abelsche Gruppe von ungerader Ordnung, d.h. die Anzahl der Elemente von $G$ ist endlich und ungerade. Zeige, dass es für jedes $y \in G$, ein $x \in G$ mit $x \circ x = y$ gibt.

**Aufgabe 8.** *Quadrate in abelschen Gruppen gerader Ordnung*
Sei $(G, \circ)$ eine endliche abelsche Gruppe von gerader Ordnung, d.h. die Anzahl der Elemente von $G$ ist endlich und gerade.

(a) Sei $e \in G$ das neutrale Element, so zeige man, dass es ein Element $x \neq e$ in $G$ gibt mit $x \circ x = e$.

(b) Betrachte die Abbildung $G \longrightarrow G$, $x \mapsto x \circ x$ und folgere aus Teil (a), dass nicht jedes Element von $G$ von der Form $x \circ x$ für ein geeignetes $x \in G$ ist.