# ÜBUNGSZETTEL 1 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

**Aufgabe 1** (2 Punkte)**.** *Gegeben sei eine lineare Abbildung* $f : W \to Z$ *und Unterräume* $V \subseteq W$ *und* $U \subseteq Z$ *mit* $f(V) \subseteq U$*. Zeigen Sie: Durch* $[w] \mapsto [f(w)]$ *ist dann auch eine Abbildung* $W/V \to Z/U$ *gegeben.*

**Aufgabe 2** (3 Punkte)**.** *Zeigen Sie: Sind* $U$ *und* $V$ *Unterräume eines Vektorraums* $W$*, so induziert die Inklusion* $U \to U + V$ *einen Isomorphismus:*

$$U/U \cap V \to U + V/V$$

**Definition.** *Für eine beliebige lineare Abbildung* $f : U \to V$ *nennt man den Quotientenraum* $V/im(f)$ *den* Kokern von $f$*, in Formeln* $coker(f)$*.*

**Aufgabe 3** (3 Punkte)**.** *Konstruieren Sie für jede lineare Abbildung* $f : U \to V$ *einen Isomorphismus*

$$ker(V \to coker(f)) \cong coker(ker(f) \to U)$$

*wobei die Pfeile die offensichtliche Projektion/Inklusion bezeichen. Sehen Sie noch einen anderen durch* $f$ *bestimmen Vektorraum der zu den obigen beiden isomorph ist?*

**Aufgabe 4** (12 Punkte)**.** *Es seien* $W$ *und* $Z$ *Vektorräume mit Untervektorräumen* $V \subseteq W$ *und* $U \subseteq Z$*. Sei weiterhin* $f : W \to Z$ *eine lineare Abbildung mit* $f(V) \subseteq U$*. Bezeichne die von* $f$ *induzierte Abbildung* $V \to U$ *bzw.* $W/V \to Z/U$ *mit* $g$ *bzw.* $h$*. Zeigen Sie:*

i) *Sind* $g$ *und* $h$ *injektiv, so auch* $f$*.*
ii) *Sind* $g$ *und* $h$ *surjektiv, so auch* $f$*.*
iii) *Ist* $W = Z$ *endlichdimensional und* $U = V$*, so gilt*

$$det(f) = det(g) \cdot det(h)$$

iv) *In der Situation von iii) gilt für alle* $\lambda$ *im Grundkörper:* $\lambda$ *ist Eigenwert von* $f$*, genau dann, wenn* $\lambda$ *Eigenwert von* $g$ *oder* $h$ *ist.*

---

Abgabetermin: 22.04. in der Vorlesung