ÜBUNGSZETTEL 10 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** *Man berechne die Länge des Großkreisbogens zwischen Bonn (*$50°44'$ *N,* $7°6'$ *O) und New York City (*$40°43'$ *N,* $74°0'$ *W), wobei die Erde als Kugel vom Radius 6371km betrachtet werden soll.*

Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und $v_1, \dots, v_n \in V$, so nennt man

$$P(v_1, \dots, v_n) = \left\{ v \in V | \exists\ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ mit } v = \sum_i \lambda_i v_i \right\}$$

den von den v_i aufgespannten Parallelepiped. Wir wollen sein Volumen definieren und bestimmen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** *Zeigen Sie:*

i) *Es gibt genau eine Funktion* $Vol : V^n \to [0, \infty)$ *mit folgenden Eigenschaften.*
   a) Vol *ist permutationsinvariant.*
   b) *Für* $\lambda \in [0, \infty)$ *gilt*
   $$Vol(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda \cdot v_n) = \lambda \cdot Vol(v_1, \dots, v_n)$$
   c) *Bilden die* v_i *eine Orthonormalbasis, so gilt*
   $$Vol(v_1, \dots, v_n) = 1$$
   d) *Es sei* X *der von* $v_1, \dots v_{n-1}$ *erzeugte Unterraum. Für alle* v_n, v'_n *gilt dann: Existiert zu jedem* $y \in X^\perp - \{0\}$ *ein* $x \in X$ *mit*
   $$\begin{aligned} &P(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) \cap (X + y) \\ &= \left[P(v_1, \dots, v_{n-1}, v'_n) \cap (X + y)\right] + x \end{aligned}$$
   so folgt
   $$Vol(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = Vol(v_1, \dots, v_{n-1}, v'_n)$$

Abgabetermin: 31.06. in der Vorlesung

ii) *Für eine normierte, alternierende n-Linearform $d : V^n \to \mathbb{R}$ gilt*
$$Vol = |d|$$

Die Bedingung d) ist ein Spezialfall des berühmten *Cavalieri'schen Prinzips*. Dass wir dies hier zur *Definition* des Volumens verwenden, mag allerdings unbefriedigend erscheinen. In der Tat bietet die *Lebesque'sche Maßtheorie* eine sehr (für die Intuition sogar schon fast zu!) allgemeine Definition von Volumina, die nicht auf einem solchen Prinzip beruht. Dennoch gibt die Aufgabe der Determinante nun endlich geometrische Bedeutung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** *Zeigen Sie, dass die folgende Objekte wirklich Beispiele für Lie-Klammern/Lie-Algebren sind.*

i) *Für einen K-Vektorraum A mit bilinearer, assoziativer (aber nicht notwendigerweise kommutativer) Multiplikation $A \times A \to A$ setzt man*
$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$
Insbesondere trifft dies auf den Endomorphismenraum $End(V)$ eines Vektorraums zu, welche man in diesem Kontext häufig mit $\mathfrak{gl}(V)$ bezeichnet.

ii) *Für einen endlich dimensionalen Vektorraum V*
$$\mathfrak{sl}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) |\ tr(x) = 0\}$$
mit der von $\mathfrak{gl}(V)$ geerbten Klammer, wobei tr die Spur einer Matrix (also die Summe ihrer Diagonaleinträge) bezeichnet. Man überlege sich vorher explizit, dass $tr(fg) = tr(gf)$ für zwei beliebige Endomorphismen von V gilt.

iii) *Für einen Skalarproduktraum V*
$$\{x \in \mathfrak{gl}(V) |\ x^* = -x\}$$
mit der induzierten Klammer. Diese Lie-Algebra wird je nach Grundkörper mit $\mathfrak{o}(V)$ oder $\mathfrak{u}(V)$ bezeichnet.

iv) *Für einen Skalarproduktraum V*
$$\{x \in \mathfrak{gl}(V) |\ x^* = -x, tr(x) = 0\}$$
mit der induzierten Klammer. Diese Lie-Algebra wird je nach Grundkörper mit $\mathfrak{so}(V)$ oder $\mathfrak{su}(V)$ bezeichnet. Man beachte jedoch $\mathfrak{so}(V) = \mathfrak{o}(V)$.

Eine basisfreie Definition der Spur werden wir übrigends voraussichtlich auf einem der nächsten Zettel kennen lernen.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** *Es sei L eine Lie-Algebra. Zeigen Sie:*

i) *Für je drei Elemente $x, y, z \in L$ gilt*
$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$$
Man beachte die gegenüber der Definition geänderte Reihenfolge der Klammern.

ii) *Die Abbildung*
$$ad : L \longrightarrow End(L), \quad x \longmapsto (y \longmapsto [x,y])$$
ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren, wo $End(L)$ die Lie-Klammer aus Aufgabe 2 i) trägt.

Man nennt *ad* die *adjungierte Darstellung* von L. Eine Darstellung einer Lie-Algebra allgemein ist ein Lie-Homomorphismus $L \to End(V)$ für irgendeinen Vektorraum V.

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** *Ist V ein zweidimensionaler K-Vektorraum und d eine nicht-verschwindende, alternierende 2-Form auf V. Zeigen Sie, dass d in folgendem Sinne universell ist:*
Ist W eine weiterer K-Vektorraum, und $c : V \times V \to W$ eine alternierende 2-lineare Abbildung, so gibt es genau eine K-lineare Abbildung $\varphi : K \to W$, derart dass $\varphi \circ d = c$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** *Ist V eine dreidimensionaler, orientierter, euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt*
$$\times : V \times V \to V$$
in folgendem Sinne universell ist:
Ist W ein weiterer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $c : V \times V \to W$ eine alternierende 2-lineare Abbildung, so gibt es genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, derart dass $\varphi \circ \times = c$.

Wir werden im letzten Kapitel der Vorlesung genauer untersuchen, was es mit universellen multilinearen Abbildungen auf sich hat. Insbesondere werden wir ihre Existenz und Eindeutigkeit für jeden Vektorraum und jeden Linearitätsgrad zeigen.