ÜBUNGSZETTEL 12 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** *Wir betrachten die beiden Gleichungen*

$$23x^2 + 72xy + 2y^2 = 100$$
$$41x^2 + 12xy + 34y^2 = 100$$

im $\mathbb{R}^2$. Man unterscheide die Ellipse von der Hyperbel und gebe bei der Ellipse die Länge der großen Hauptachse (also den Durchmesser) an, bei der Hyperbel den Abstand der Hyperbeläste zueinander.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** *Man entscheide ob es sich bei den Lösungsmengen folgender Gleichungen*

$$x^2 + y^2 + 2xz - 4yx = -3$$
$$2x^2 + 2y^2 - z^2 + 12xz + 6yz = 3$$

im $\mathbb{R}^3$ jeweils um ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid handelt.

Bezeiche von nun an K einen Körper ungerader Charakteristik und V, W endlichdimensionale K-Vektorräume.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** *Man zeige, daß auf $V \oplus V^*$ durch $q(v, w) = w(v)$ eine nichtausgeartete quadratische Form gegeben ist und gebe die zugrundeliegende symmetrische Bilinearform an.*

Zur Erinnerung: Ein Isomorphismus $f : (V, q) \to (W, r)$ quadratischer Räume ist ein Isomorphismus der zugrunde liegenden Vektorräume, der zusätzlich $r(f(x)) = q(x)$ für alle $x \in V$ erfüllt. In diesem Fall, erhält f natürlich auch die zugehörigen symmetrischen Bilinearformen.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** *Sei K quadratisch abgeschlossen, X ein K-Vektorraum und q eine nichtausgeartete quadratische Form auf V. Wenn $\dim(X)$ gerade ist, so ist (X, q) isomorph zu einer quadratischen Form, wie sie in Aufgabe 3 betrachtet wurde.*
Wenn $\dim(X)$ ungerade ist, existieren ein Vektorraum V und ein Isomorphismus $X \to V \oplus V^* \oplus K$, welcher q mit der quadratischen Form

$$r(v, w, k) = w(v) + k^2$$

identifiziert.

Abgabetermin: 15.07. in der Vorlesung

Daß die rechte Seite der letzten Gleichung in der Tat eine quadratische Form ist, ist hoffentlich klar und muß nicht bewiesen werden.

Die letzte Aufgabe zeigt, daß es für große $\dim(X)$ im quadratisch abgeschlossenen Fall isotrope Unterräume von großer Dimension gibt (nämlich welche?). Wenn „selbstadjungiert“ bzw. „normal“ in Bezug auf eine derartige symmetrische Bilinearform definiert wird, so gelten die meisten der von uns im Falle von Skalarproduktvektorräumen bewiesenen Spektraleigenschaften selbstadjungierter und normaler Endomorphismen nicht mehr.

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** *Sei die symmetrische Bilinearform β auf V nichtausgeartet und f ein Endomorphismus von V, dann gibt es genau einen Endomorphismus f^* von V mit $\beta(v, f^*(w)) = \beta(f(v), w)$. Es gilt $f^{**} = f$.*

Definition. *Wir nennen f^* β-adjungiert zu f und f β-selbstadjungiert (bzw. β-normal), wenn $f = f^*$ (bzw. $ff^* = f^*f$) gilt.*

Aufgabe 6 (2 Punkte)**.** *In der Situation von Aufgabe 1 sei β die zu der quadratischen Form gehörende symmetrische Bilinearform. Für lineare Abbildungen*

$$a : V \to V, b : V^* \to V, c : V \to V^*, d : V^* \to V^*$$

bezeichnen wir mit $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ den durch

$$f(v, w) = \big(a(v) + b(w), c(v) + d(w)\big)$$

definierten Endomorphismus von $V \oplus V^*$. Man zeige

$$f^* = \begin{pmatrix} d^* & b^* \\ c^* & a^* \end{pmatrix},$$

wobei wir mit d^* den aus dem zu d dualen Endomorphismus von V^{**} durch Identifikation dieses Raumes mit V erhaltenen Endomorphismus von V bezeichnen und ähnlich für b^*, c^* vorgehen.

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** *Man gebe jeweils Beispiele für die folgenden Situationen an, wobei „selbstadjungiert“ bzw. „normal“ in Bezug auf eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform zu definieren ist.*

i) *$f \neq 0$ ist selbstadjungiert und nilpotent. Insbesondere sind selbstadjungierte Endomorphismen nicht unbedingt diagonalisierbar.*
ii) *f und g sind normal, es gilt $fg = gf$, aber $f+g$ ist nicht normal und es gilt $fg^* \neq g^*f$.*
iii) *f ist normal und X ein f-invarianter Unterraum, welcher nicht f^*-invariant ist.*