ÜBUNGSZETTEL 3 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** *Es seien* $(V_i)_{i=1}^k$ *Unterräume des* K*-Vektorraumes* V*. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:*

i) *Für jedes* $v \in V_1 + \cdots + V_k$ *ist dessen Darstellung als* $v = v_1 + \cdots + v_k$ *mit* $v_i \in V_i$ *eindeutig.*
ii) *Für jedes* i *mit* $1 \le i \le k$ *gilt*

$$V_i \cap \sum_{\substack{1 \le j \le k \\ j \ne i}} V_j = \{0\}$$

Definition. *Für nilpotente Endomorphismen* N *eines* $\mathbb{Q}$*-Vektorraumes* V *sei* $\exp(N) = \sum_{k=1} \frac{N^k}{k!}$.

Man beachte, dass diese Summe nach Voraussetzung in Wahrheit eine endliche ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** *Es seien* A *und* B *nilpotente Endomorphismen eines* K*-Vektorraums* V *mit* $AB = BA$*. Zeigen Sie:*

i) AB *ist nilpotent.*
ii) $A + B$ *ist ebenfalls nilpotent.*
iii) *Es gilt* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

Wird die Voraussetzung $AB = BA$ *in allen drei Teilen benötigt? Geben Sie hierfür entweder Beweise oder Gegenbeispiele!*

Da wir im Folgenden immer wieder reelle als komplexe Matrizen auffassen werden, untersucht die nächste Aufgabe den Prozess der Komplexifizierung einmal systematisch:

Aufgabe 3 (12 Punkte)**.** *Gegeben sei ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum* V*. Wir definieren seine Komplexifizierung* $V_{\mathbb{C}}$ *wie folgt:*

$$V_{\mathbb{C}} = V \times V$$

mit der komponentenweisen Addition und folgender Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

$$(a + bi) \cdot (v, w) = (av - bw, bv + aw)$$

Zeigen Sie:

Abgabetermin: 06.05. in der Vorlesung

i) *$V_{\mathbb{C}}$ ist in der Tat ein komplexer Vektorraum,*

$$v \longmapsto (v, 0)$$

ist eine reell-lineare Einbettung $\iota : V \to V_{\mathbb{C}}$ gegeben und

$$(v, w) \longmapsto (v, -w)$$

ist ein reell aber nicht komplex-linearer Automorphismus $\overline{}$ von $V_{\mathbb{C}}$.

ii) *Für jeden komplexen Vektorraum X ist die Einschränkungsabbildung*

$$Hom_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, X) \to Hom_{\mathbb{R}}(V, X)$$

bijektiv.

iii) *Ist B eine reelle Basis von V so ist $\iota(B)$ eine komplexe Basis von $V_{\mathbb{C}}$.*

iv) *Ist $f : V \to V'$ linear, so gibt es genau eine komplex lineare Abbildung $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V'_{\mathbb{C}}$, die das Diagram*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f_{\mathbb{C}}} & V'_{\mathbb{C}} \end{array}$$

kommutieren lässt.

v) *Die Matrix von f bzgl. B ist identisch mit der von $f_{\mathbb{C}}$ bzgl. $\iota(B)$.*

vi) *Für eine Matrix $A \in Mat_{dim_{\mathbb{R}} V}(\mathbb{C})$ ist die bzgl. $\iota(B)$ zu $\overline{A}$ gehörende Abbildung $V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ gegeben durch*

$$\overline{} \circ f \circ \overline{},$$

wobei f die zu A gehörige Abbildung ist.