ÜBUNGSZETTEL 6 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Dieser Zettel ist Beweisen der Diagonalisierbarkeit normaler und selbstadjungierter Endomorphismen gewidmet, die ohne Jordan'sche Normalform auskommen. Zur gemeinsamen Behandlung von euklidischen und unitären Vektorräumen werden wir sie als *Skalarprodukträume* bezeichnen und den Grundkörper, also $\mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{C}$, als $\mathbb{K}$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Zeigen Sie:*

i) *Kommutieren zwei Endormorphismen S und T eines K-Vektorraums und so ist für jedes $\lambda \in K$ der Unterraum $V_\lambda(S)$ invariant unter T. Wie sieht es mit $V_\lambda^\sim(S)$ aus?*

ii) *Für einen normalen Endomorphismus S eines endlich dimensionalen Skalarproduktraums V und jeden Unterraum U gilt: U ist S-invariant genau dann, wenn $U^\perp$ invariant unter S^* ist.*

Folgern Sie:

iii) *Jeder normale Endomorphismus auf einem endlich dimensionalen, unitären Vektorraum ist diagonalisierbar.*

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** *Es sei S ein selbstadjungierter Endomorphismus auf einem endlich dimensionalen Skalarproduktraum V und $x \in V$ habe die Eigenschaft*

$$\frac{\langle Sx, x\rangle}{||x||^2} = \max_{v \in V} \frac{\langle Sv, v\rangle}{||v||^2}$$

Dann ist x ein Eigenvektor von S zum reellen (!) Eigenwert $\frac{\langle Sx,x\rangle}{||x||^2}$. Folgern Sie mittels der Teile i) und ii) der ersten Aufgabe noch einmal direkt (also wieder ohne Benutzung der Jordan'schen Normalenform), dass S durch eine Orthonormalbasis diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist.

Hinweis: Für den ersten Teil nehme man etwa das Gegenteil an, und stre den Ausdruck $\langle Ax, x\rangle$ geeignet (Stichwort Orthogonalprojektion) derart, dass Ableiten das Ergebnis liefert. Für die Konsequenz sollte man sich unbedingt an die Kompaktheit der Einheitssphäre erinnern!

Abgabetermin: 03.06. in der Vorlesung

Aufgabe 3 (3 Punkte). *Zeigen Sie:*

i) *Zu zwei diagonalisierbaren Endomorphismen eines endlich dimensionalen Vektorraums, gibt es genau dann eine Basis die beide gemeinsam diagonalisiert, wenn sie kommutieren.*
ii) *Zu zwei Endomorphismen S, T eines eines endlich dimensionalen Skalarproduktraums, gibt es genau dann eine Orthonormalbasis die beide gemeinsam diagonalisiert, wenn S, T, S^* und T^* miteinander kommutieren.*

Aufgabe 4 (3 Punkte). *Zeigen Sie: Ist ein Endomorphismus S eines K Vektorraums V diagonalisierbar, so gilt für jeden S-invarianten Unterraum $U \subseteq V$*

$$U = \bigoplus_{\lambda \in K} \left[V_\lambda(S) \cap U \right]$$

Aufgabe 5 (4 Punkte). *Zeigen Sie: Ist T eine normaler Endomorphismus eines endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums und $U \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum so ist auch $U^\perp$ ein T-invarianter Unterraum.*

Hinweis: Man kann man hierfür etwa Aufgaben 1 & 3 mit dem Fakt aus der Vorlesung kombinieren, dass ein Eigenvektor von T auch einer von T^* ist, um den komplexen Fall zu erhalten. Der reelle folgt dann durch Komplexifizierung. Eine andere Möglichkeit ist es eine Orthonormalbasis $\{u_i\}_{i \in I}$ von U zu einer von V zu erweitern und die Gleichung $||Tv_i|| = ||T^* v_i||$ gewinnbringend anzuwenden. Es gibt bestimmt auch noch viele weitere Möglichkeiten.