ÜBUNGSZETTEL 8 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** *Es sei $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:*

i) *$A = \exp(B)$ für selbstadjungiertes, reelles B genau dann, wenn A symmetrisch mit positiven Eigenwerten ist.*
ii) *$A = \exp(B)$ für antiselbstadjungiertes, relles B genau dann, wenn A orthogonal mit $det(A) = 1$ ist.*
iii) *$A = \exp(B)$ für normales, reelles B genau dann, wenn die negativen, reellen Eigenwerte von A gerade Vielfachheit haben.*

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** *Sei V ein orientierter, zweidimensionaler, euklidischer Vektorraum, $x, y, z \in V$ mit $x + y + z = 0$ und d eine normierte, alternierende Bilinearform auf V. Zeigen Sie, dass*

$$|d(x, y)| = ab \cdot \sin(\gamma)$$

und folgern Sie den Sinussatz

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Hierbei bezeichnen a, b, c die Entfernungen zwischen (x, z), (y, z) bzw. (x, y) und die griechischen Buchstaben entsprechend die gegenüberliegenden Winkel.

Wir betrachten für die folgenden Aufgaben einen orientierten Euklidischen Vektorraum V der Dimension 3 und drei Elemente A, B, C der Einheitsspäre

$$S = \left\{ x \in V \middle| |x| = 1 \right\},$$

welche eine Basis von V bilden. Die linearen Hüllen $\mathcal{L}(A, B)$, $\mathcal{L}(B, C)$ und $\mathcal{L}(A, C)$ sind dann zweidimensional. Die Durchschnitte von S mit zweidimensionalen Unterräumen von V nennt man *Großkreise*, im Unterschied zu den Durchschnitten von S mit 0 nicht enthaltenden zweidimensionalen affinen affinen Unterräumen, welche einen kleineren Kreisradius haben und *Kleinkreise* genannt werden. Der Großkreis $S \cap \mathcal{L}(B, C)$ zerfällt nach Entfernen der Punkte A und B in zwei Zusammenhangskomponenten. Man kann zeigen, daß die kürzere davon die kürzeste in S enthaltene Verbindungskurve zwischen B und C ist. Ihre Länge ist gleich dem im Bogenmaß gemessenen Winkel a zwischen den Vektoren

B und C. Entsprechend bezeichnen wir die im Bogenmaß gemessenen Winkel zwischen A und B bzw. A und C mit c bzw. b. Die hier betrachteten Winkel sind unorientiert und auf Grund unserer Annahme über die lineare Unabhängigkeit $\in (0, \pi)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** *Unter den obigen Annahmen gibt es genau einen Vektor* $\mathfrak{t}_{A,B} \in \mathcal{L}(A, B)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

i) $\langle \mathfrak{t}_{A,B}, A \rangle = 0$.
ii) $\langle \mathfrak{t}_{A,B}, B \rangle > 0$.
iii) $|\mathfrak{t}_{A,B}| = 1$.

Es gilt

$$\mathfrak{t}_{A,B} = \frac{B - \langle A, B \rangle A}{\sin c}$$

Die obigen Bedingungen lassen sich geometrisch so interpretieren, daß $\mathfrak{t}_{A,B}$ der Tangentialvektor an der Stelle A an den Großkreis $\mathcal{L}(A, B) \cap S$ ist (a), welcher in Richtung auf B zeigt (b) und die Länge 1 hat. Analog dazu sei $\mathfrak{t}_{A,C}$ der Tangentialvektor an $\mathcal{L}(A, C) \cap S$ an der Stelle A, welcher in Richtung C zeigt und Länge 1 hat. Wir bezeichnen mit α den (unorientierten) Winkel zwischen $\mathfrak{t}_{A,B}$ und $\mathfrak{t}_{A,C}$. Analog dazu betrachtet man die Vektoren $\mathfrak{t}_{B,A}, \mathfrak{t}_{B,C}$ an der Stelle B und den eingeschlossenen Winkel β, sowie $\mathfrak{t}_{C,A}$ und $\mathfrak{t}_{C,B}$ an der Stelle C und den Winkel γ. Die spärische Trigonometrie untersucht Beziehungen zwischen a, b, c und α, β und γ in Analogie zu den bekannten Sätzen der ebenen Trigonometrie. Während in letzterem Fall die Zahlenwerte a, b, c direkt in die Gesetze eingehen, tauchen in der spärischen Trigonometrie Sinus-, Kosinus- oder Tangenswerte der Seitenlängen des sphärischen Dreieckes auf.

Unser erstes Ziel ist der Beweis des *Sinussatzes*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Sei immer d eine normierte alternierende Trilinearform auf V. Wir setzen von nun an immer voraus, daß die Ecken des sphärischen Dreieckes so numeriert sind, daß $d(A, B, C)$ positiv ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** *Wenn u, v und w Vektoren der Länge* 1 *aus V sind und v und w beide orthogonal zu u sind, so gilt*

$$|d(u, v, w)| = \sin \phi,$$

wobei ϕ der Winkel zwischen v und w ist.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** *Durch Anwendung der vorigen Aufgabe auf* $d(A, \mathfrak{t}_{A,B}, \mathfrak{t}_{B,C})$ *drücke man* $d(A, B, C)$ *als Produkt von Winkel- und Seitensinuswerten aus und leite aus dem Ergebnis den Sinussatz her!*