ÜBUNGSZETTEL 9 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Es sei erneut V ein orientierter, euklidischer Vektorraum der Dimension 3 mit Einheitssphäre S und $A, B, C \in S$ drei Punkte, die nicht auf einem gemeinsamen Großkreis liegen, also eine Basis von V bilden. Weiterhin sei d eine normierte, alternierende Trilinearform auf V, derart dass

$$d(A, B, C) > 0.$$

Es bezeichnen wieder a, b, c die Winkel zwischen (B, C), (A, C) bzw. (A, B), $\mathsf{t}_{A,B}, \mathsf{t}_{B,C}, \mathsf{t}_{A,C}$ die Tangentialvektoren gemäß Aufgabe 3 von Zettel 8 und α, β, γ die Winkel zwischen $(\mathsf{t}_{A,B}, \mathsf{t}_{A,C}), (\mathsf{t}_{B,A}, \mathsf{t}_{B,C})$ bzw. $(\mathsf{t}_{CA}, \mathsf{t}_{CB})$. Wir bezeichnen das bezüglich d definierte Vektorprodukt auf V mit $\times$. Es hilft wahrscheinlich enorm, sich diese Situation einmal aufzumalen um den Definitionen geometrischen Inhalt zu geben!

Aufgabe 1 (3 Punkte). *Durch Anwendung von Aufgabe 3 von Zettel 8 auf die Formel* $\cos\alpha = \langle \mathsf{t}_{A,B}, \mathsf{t}_{A,C} \rangle$ *leite man den Seitenkosinussatz*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

her!

Durch zyklische Vertauschung der Eckpunkte A, B, und C ergeben sich die anderen Seitenkosinussätze:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Aufgabe 2 (2 Punkte). *Es gilt* $A \times B = \sin(c) A \times \mathsf{t}_{A,B} = \sin(c) \mathsf{t}_{B,A} \times B$.

Das spärische Dreieck mit den Ecken

$$\tilde{A} = \frac{B \times C}{\sin a} = B \times \mathsf{t}_{B,C} = \mathsf{t}_{C,B} \times C$$
$$\tilde{B} = \frac{C \times A}{\sin b} = C \times \mathsf{t}_{C,A} = \mathsf{t}_{A,C} \times A$$
$$\tilde{C} = \frac{A \times B}{\sin c} = A \times \mathsf{t}_{A,B} = \mathsf{t}_{B,A} \times B$$

Abgabetermin: 24.06. in der Vorlesung

nennt man das *Polarendreieck* zu dem Ausgangsdreieck. Wir bezeichnen die Seiten sowie Winkel dieses Dreieckes mit $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ sowie $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$. Für eine geometrische Definition bedürfen wir der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** *Zeigen Sie:*

i) *Es gilt* $|\tilde{A}| = |\tilde{B}| = |\tilde{C}| = 1$.
ii) *Die Skalarprodukte* $\langle \tilde{A}, A\rangle$, $\langle \tilde{B}, B\rangle$ *und* $\langle \tilde{C}, C\rangle$ *sind positiv.*
iii) *Es gilt* $d(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) > 0$.

Weiterhin zeige man, daß das Polarendreieck des Polarendreiecks gleich dem Ausgangsdreieck ist.

Der Vektor $\tilde{A}$ steht also, weil zu $B \times C$ proportional, senkrecht auf der Ebene des Großkreisbogens $S \cap \mathcal{L}(B, C)$ und liegt bzgl. dieser Ebene in demselben Halbraum wie A, was zusammen mit analogen Charakterisierungen der anderen Ecken gerade die übliche geometrische Definition des Polarendreiecks ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** *Für Vektoren* u, v, w *aus* V *mit* $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = 0$ *gilt*

$$\langle u \times v, u \times w\rangle = |u|^2 \langle v, w\rangle$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** *Durch Anwendung der vorigen Aufgabe auf* A, $\mathsf{t}_{A,B}$ *und* $\mathsf{t}_{A,C}$ *berechne man* $\cos \tilde{a}$ *und leite die Gleichung* $\tilde{a} + \alpha = \pi$ *her!*

Durch Vertauschung der Ecken sowie Vertauschung von Polarendreieck und Ausgangsdreieck kommt insgesamt

$$a + \tilde{\alpha} = b + \tilde{\beta} = c + \tilde{\gamma} = \tilde{a} + \alpha = \tilde{b} + \beta = \tilde{c} + \gamma = \pi.$$

Durch Anwendung des Seitenkosinussatzes auf das Polarendreieck ergibt sich so der Winkelkosinussatz

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma \\
\cos\beta &= \cos b \sin\alpha \sin\gamma - \cos\alpha \cos\gamma \\
\cos\gamma &= \cos c \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta
\end{aligned}$$

Wegen $\cos a = 1 + O(a^2)$ ergibt sich $\cos\alpha = \cos(\pi - \beta - \gamma) + O(a^2)$, für kleine Abmessungen des Dreieckes geht also der Winkelkosinussatz über in den bekannten Satz über die Innenwinkelsumme des ebenen Dreiecks.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** *Im sphärischen rechtwinkligen Dreieck mit einem rechten Winkel bei* C *(also* $\gamma = \frac{\pi}{2}$*) gilt*

i) $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.
ii) $\sin c \sin\alpha = \sin a$.

iii) $\tan c \cos\alpha = \tan b$.
iv) $\sin b \tan\alpha = \tan a$.

Auf Grund von $\cos c = 1 - \frac{c^2}{2} + O(c^4)$ sowie

$$\cos a \cos b = 1 - \frac{a^2 + b^2}{2} + O\big(a^4 + b^4\big)$$

geht der erste Punkt für kleine Abmessungen asymptotisch in den Satz des Pythagoras über.
Zu den drei anderen Punkten gelten natürlich auch die Analoga für die Winkelfunktionen von β. Weil die in den Quotienten auf der rechten Seite auftauchenden Winkelfunktionen tan und sin an der Stelle 0 den Funktionswert 0 und die Ableitung 1 haben, gehen diese Formeln für kleine Abmessungen des Dreieckes asymptotisch über in die planimetrischen Definition von Tangens, Sinus, Kosinus als Quotienten der Katheten bzw. der Katheten durch die Hypothenuse.