Aufgabe 7.3

Unsere Sätze über das Differenzieren unter dem Integral sind hervorragend, daher kommen die Probleme nicht. Hinreichend für Differenzierbarkeit von

$$F(x) = \int f(x,t)dt$$

ist: Für jedes t ist $x \mapsto f(x,t)$ stetig differenzierbar, und, es gibt eine von x unabhängige integrierbare Majorante für $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f|_{(x,t)}$, ($x$ auch mehrdimensional).

Ich betrachte die Aufgabe als Übung zum Umgang mit den Differentiationsregeln. Das habe ich in der Vorlesung auch gesagt. Die Bearbeitungsfehler, die Frau Engels mitgeteilt hat, sind daher bedauerlich.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left((f\circ m_t)(x,y)\det(\frac{\partial}{\partial t}m, \frac{\partial}{\partial y}m)\right) = \\
(1)\qquad &df|_m((\frac{\partial}{\partial x}m)\det(\frac{\partial}{\partial t}m, \frac{\partial}{\partial y}m)) + \\
&(f\circ m_t)(x,y)\det(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}m, \frac{\partial}{\partial y}m) + (f\circ m_t)(x,y)\det(\frac{\partial}{\partial t}m, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left((f\circ m_t)(x,y)\det(\frac{\partial}{\partial t}m, \frac{\partial}{\partial x}m)\right) = \\
(2)\qquad &df|_m((\frac{\partial}{\partial y}m)\det(\frac{\partial}{\partial t}m, \frac{\partial}{\partial x}m)) + \\
&(f\circ m_t)(x,y)\det(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}m, \frac{\partial}{\partial x}m) + (f\circ m_t)(x,y)\det(\frac{\partial}{\partial t}m, \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left((f\circ m_t)(x,y)\det(\frac{\partial}{\partial x}m, \frac{\partial}{\partial y}m)\right) = \\
(3)\qquad &df|_m((\frac{\partial}{\partial t}m)\det(\frac{\partial}{\partial x}m, \frac{\partial}{\partial y}m)) + \\
&(f\circ m_t)(x,y)\det(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}m, \frac{\partial}{\partial y}m) + (f\circ m_t)(x,y)\det(\frac{\partial}{\partial x}m, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}m)
\end{aligned}$$

Behauptung: (1) $-$ (2) $=$ (3)
Beweis: Unter Berücksichtigung der Symmetrie der zweiten Ableitung ist die Behauptung für die Terme, die mit $(f \circ m_t)$ beginnen, unmittelbar klar. Für die Terme, die mit $df|_m$ beginnen, folgt die Behauptung aus der in der Aufgabe angegebenen Determinanten-Identität (zweidimensional, sonst länger): $v\det(v_1, v_2) = v_1 \det(v, v_2) + v_2 \det(v_1, v)$.
Alles, was sonst in der Aufgabe vorkommt, beruht auf $h(x) - h(a) = \int_a^x h'(t)dt$.