Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 1 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **20. Oktober 2000**

Aufgabe 1 – Kreise

a) Geben Sie einen parametrisierten Kreis $c(t) \in \mathbb{R}^2$ vom Radius $r > 0$ an, der mit konstanter Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}$ durchlaufen wird. Wie groß ist die Beschleunigung $a \in \mathbb{R}$?

b) Es seien $v \perp a \in \mathbb{R}^3$ zwei orthogonale Vektoren mit $v, a \neq 0$. Geben Sie einen Kreis $c(t)$ an mit $\dot{c}(0) = v$, $\ddot{c}(0) = a$, $|\dot{c}(t)| = \text{const}$.

c) Wie lautet ein Kreis $c(t)$ mit $\dot{c}(0) = v$, $\ddot{c}(0) = a$ wenn $v, a \in \mathbb{R}^3$ nur noch linear unabhängig vorausgesetzt sind?

Aufgabe 2 – Zykloide

a) Skizzieren Sie die *Zykloide*

$$c(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

für $0 \leq t \leq 4\pi$, mit $r = \frac{1}{2}$, 1, und 2. Geben Sie auch einige Tangenten an und erklären deren Konstruktion. Wieso kann eine differenzierbare Kurve Spitzen haben? Wie kann man die Kurve für $r = 1$ als Bahn eines Punktes des Einheitskreises auffassen, und welche Interpretation gibt es für andere Werte von r?

b) Berechnen Sie die Bogenlänge von $c(t)$ für $r = 1$ und $t \in [0, 2\pi]$.

Auf der Rückseite finden Sie ein anderes Beispiel für Rollkurven.

Aufgabe 3 – Gitter in $\mathbb{R}^2$

Zwei linear unabhängige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ definieren ein *Gitter*

$$G := \{nu + mv \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Man kann G auch als Translations-Untergruppe des $\mathbb{R}^2$ auffassen. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$p \sim q \iff p - q \in G.$$

Die vollen Äquivalenzklassen der Form $G + q$ heißen *Bahnen* von q. Skizzieren Sie zwei Bahnen. Definieren Sie eine Metrik auf der Menge der Äquivalenzklassen (zeigen Sie die Dreiecksungleichung). Warum kann man je zwei Klassen durch eine rektifizierbare Kurve verbinden?

Aufgabe 4 – Einheitskreise in Banachebenen

a) Eine Norm für den $\mathbb{R}^2$ wird durch ein regelmäßigen Sechseck mit Mittelpunkt 0 definiert. Wie groß ist der Umfang dieses Einheitskreises? Bestimmen Sie weniger symmetrische Sechsecke mit dem selben Umfang.

b) Auch ein Parallelogramm (symmetrisch um $0 \in \mathbb{R}^2$) führt auf die gleiche Weise eine Norm ein. Wie groß ist sein Umfang?

c) Zeigen Sie, daß eine Ellipse mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$ eine Norm definiert, die der Ellipse Umfang 2π gibt.

d) Es sei C eine beliebige symmetrische konvexe Kurve, die wiederum eine Norm definiert. Finden Sie ein einbeschriebenes Sechseck, dessen Seitenlängen in dieser Norm alle 1 sind. Zeigen Sie, daß der Umfang jedes umbeschriebenen Parallelogramms wenigstens 8 ist. Warum gibt es flächenkleinste C umschriebene Parallelogramme? (Also gilt $6 \leq 2\pi \leq 8$ in jeder Banachebene.)

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 2 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **27. Oktober 2000**

Aufgabe 5 – Ellipsen

Die Kurve $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$, für $a > b > 0$ und $0 \leq t < 2\pi$, heißt *Ellipse*, die beiden Punkte $F_\pm = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ sind ihre *Brennpunkte*.

a) Zeigen Sie, daß die Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist, und zwar $|c(t) - F_+| + |c(t) - F_-| = 2a$. Hierauf beruht die sogenannte Gärtnerkonstruktion, die eine Ellipse durch einen Faden mit Endpunkten $F_\pm$ erzeugt.

b) Rechnen Sie nach, daß die Winkel zwischen Kurventangente und *Brennstrahlen* konstant sind, $\angle(c(t) - F_+, -\dot{c}(t)) = \angle(c(t) - F_-, \dot{c}(t))$. Daher werden von F_+ ausgehende Lichtstrahlen an der Ellipse nach F_- reflektiert. Spiegelt man F_- an allen Tangenten, so erhält man einen Kreis vom Radius $2a$ um F_+, den *Leitkreis*.

c) Evtl. eine Woche später: Der kleinste Krümmungskreis (Def. nach Ende der Bogenlängendiskussion) liegt innerhalb, der größte außerhalb der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Aufgabe 6 – Projektion auf konvexe Mengen

Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^d \setminus K$ sei $\pi(p)$ der nächste Punkt in K.

a) Es sei H die Hyperebene durch $\pi(p)$, die senkrecht auf der Verbindungsstrecke von p nach $\pi(p)$ steht. Dann liegt K auf einer Seite von H; daher heißt H Stützhyperebene.

b) Zeige: Durch jeden Randpunkt von K geht eine Stützhyperebene.

c) Zeige, daß die Projektion π den Abstand verringert, es gilt also $|\pi(p) - \pi(q)| \leq |p - q|$ für alle $p, q \in \mathbb{R}^d \setminus K$. (Also: $c : I \to \mathbb{R}^d$ rektifizierbar $\Rightarrow \pi \circ c$ rektifizierbar.)

Aufgabe 7 – Bahnenabstand für isometrische Gruppenoperationen

Falls man (wie in Aufgabe 3) einen metrischen Raum M hat, eine Gruppe G und eine Abbildung $* : G \times M \to M$ mit $(g, m) \mapsto g * m$, so sagt man G *operiert* auf M, wenn $(gh) * m = g * (h * m)$ für alle $g, h \in G$ und $m \in M$ gilt. Die Teilmengen $G * m := \{g * m \mid g \in G\}$ für festes $m \in M$ heißen *Bahnen* oder Orbiten. Wir setzen weiter voraus, daß G *isometrisch* operiert, d.h. es gilt $d(m, n) = d(g * m, g * n)$ für alle $g \in G$ und $m, n \in M$.

a) Wenn M vollständig ist, kompakte Abstandskugeln besitzt und die Bahnen abgeschlossen sind, gibt es einen Punkt $m_0 \in G{*}m$ mit $d(m_0, n) = \inf\{d(g{*}m, n) \mid g \in G\}$.

b) Folgern Sie, daß $d(G * m, G * n) := \min\{d(g * m, n) \mid g \in G\}$ eine Metrik auf der Menge der Bahnen definiert.

c) Falls $c : [0, 1] \to M$ eine rektifizierbare Kurve von m nach n ist, so ist $t \mapsto G * c(t)$ eine rektifizierbare Kurve im Raum der Bahnen von $G * m$ nach $G * n$. Benutzen Sie Teil a), um Länge$(c) \geq$ Länge$(G * c)$ zu zeigen.

d) Betrachten Sie die Rotationen in $\mathbb{R}^2$ um 0. Was ist der Orbitraum und seine Metrik?

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 3 Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann 2. November 2000

Aufgabe 8 – Evoluten

Es sei $c(t)$ eine reguläre ebene C^2-Kurve mit *innerer* Normale $n(t) = D^{90}\dot{c}(t)/|\dot{c}(t)|$, Krümmung $\kappa(t) \neq 0$, und Krümmungsradius $r(t) = 1/\kappa(t)$. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte $\gamma(t) := c(t) + r(t)n(t)$ heißt *Evolute* von c.

a) Zeigen Sie, daß die Gerade $\lambda \mapsto c(t) + \lambda n(t)$ in Normalenrichtung durch $c(t)$ die Tangente der Evolute in $\gamma(t)$ bildet.

b) Wenn (t_1, t_2) ein Intervall ist, auf dem $r(t)$ wächst (oder $\dot{\kappa}(t) < 0$), dann gilt Länge$(\gamma|_{[t_1,t_2]}) = r(t_2) - r(t_1)$.

c) Folgern Sie daraus, daß für $t_1 < t_2$ der Krümmungskreis K_{t_1} innerhalb von K_{t_2} liegt.

Aufgabe 9 – SO(4)-Aktion und Aktion von Untergruppen

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$(s,t) \mapsto U_{s,t} := \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}^2, +)$ nach $\mathbf{SO}(4)$ ist.

b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist auch die Abbildung $t \mapsto A_t := U_{at,bt}$ ein Gruppenhomomorphismus, und zwar von $(\mathbb{R}, +)$ nach $\mathbf{SO}(4)$.

c) Warum haben die Bahnkurven $c(t) := A_t p$ für $p \in \mathbb{R}^4$ konstante Krümmung?

Aufgabe 10 – Schraubenlinien und Schraubungen

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$t \mapsto S_t(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p$$

ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ in die Isometrien des $\mathbb{R}^3$ ist und daß jede Bahnkurve (Schraubenlinie oder *Helix*) $c(t) = S_t(p)$ konstante Krümmung hat.

b) Zu jeder regulären Kurve c heißt die Kurve $\dot{c}/|\dot{c}|$ in $\mathbb{S}^2$ *Tangentenbild* von c. Was ist das Tangentenbild einer Schraublinie $t \mapsto S_t(p)$? Unter welcher Bedingung an p enthält das Tangentenbild ein Paar aufeinander senkrechter Punkte $\dot{c}/|\dot{c}|(\tau_1) \perp \dot{c}/|\dot{c}|(\tau_2)$?

c) Finden Sie damit zwei aufeinander senkrechte Ebenen $E_1 \perp E_2$, die eine Helix senkrecht schneiden. Verwenden Sie diese beiden Ebenen, um eine geschlossene Kurve *konstanter* Krümmung in $\mathbb{R}^3$ anzugeben, die kein Kreis ist ($\ddot{c}$ stetig, $\dddot{c}$ nicht).

Aufgabe 11 – Krümmungsberechnung

a) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ der Parabel $c(t) = (t, t^2)$. (Überzeugen Sie sich, daß die auf der Rückseite gezeigte Evolute dem Ergebnis entspricht.)

b) Berechnen Sie die Krümmungsradien der Zykloide $c(t) := (t + \sin t, -\cos t)$ von Aufgabe 2. Was passiert in den Spitzen? Prüfen Sie die Gleichung $\gamma(t) = c(\pi+t)+(-\pi, 2)$ für die Evolute γ nach. Was stellt die Evolute also dar?

c) Haben die auf der Rückseite von Blatt 2 abgebildeten Torusknoten

$$c(t) = ((R + r\cos mt)\cos nt,\ (R + r\cos mt)\sin nt,\ r\sin mt)$$

konstante Krümmung ($m, n \in \ N,\ r, R > 0$)?

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 4 Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann 8. November 2000

Aufgabe 12 – Frenet-Theorie

Es sei $c(t)$ eine Kurve mit Krümmung $\kappa(t)$ und Torsion $\tau(t)$.

a) Falls $\tau(t) = 0$, aber $\kappa \neq 0$, so ist c eine *ebene* Kurve, d.h. es gibt einen konstanten Vektor v mit $\langle v, c(t) - c(0) \rangle = 0$.

b) Falls $\kappa(t) \neq 0$ und $\tau(t)/\kappa(t) = \cot \alpha$ für ein festes $\alpha \neq 0$, so ist c eine *Böschungslinie*. Das heißt, es gibt einen (vertikalen) Vektor v mit $\langle \dot{c}(t), v \rangle = \sin \alpha$.

Aufgabe 13 – Parallele Kurven

Es sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine mit Bogenlänge parametrisierte Kurve und $n(t) = \mathrm{Rot}(90°)\dot{c}(t)$ ihr Einheitsnormalenfeld. Wir definieren die *Parallelkurvenschar* $f : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}^2$ durch $(s, t) \mapsto c(t) + sn(t)$.

a) Charakterisieren Sie die *kritischen Punkte* von f – das sind diejenigen Punkte (s, t), in denen $df(s, t)$ nicht den Höchstrang 2 hat – durch die Krümmung $k(t)$ der Kurve c. Welche Kurve beschreiben deren Bilder (die *kritischen Werte* von f)?

b) Es sei $c_\varepsilon(t) = f(\varepsilon, t)$ die *Parallelkurve* von c im Abstand ε. Bestimmen Sie die Krümmungsradien $1/\kappa_\varepsilon$ von c_ε und zeigen Sie, daß alle Kurven c_ε dieselbe Evolute besitzen.

Aufgabe 14 – Evolventen

Evolventen einer nach der Bogenlänge parametrisierten regulären ebenen Kurve c sind die Kurven $c_\alpha(t) := c(t) - (t - \alpha)\dot{c}(t)$. Diese Kurven beschreiben die Bahn des freien Endpunkts eines undehnbaren, straff gespannten Fadens beim Abwickeln von c.

a) Zeigen Sie, daß zwei Evolventen c_α und c_β parallel sind und alle Evoluten die Ausgangskurve c ergeben.

b) Geben Sie die Evolventen c_α des Einheitskreises $(\cos t, \sin t)$ explizit an, und berechnen Sie den Krümmungsradius $1/\kappa_\alpha$ von c_α; wo ist die Krümmung definiert? Skizzieren Sie zwei Kreisevolventen.
Hinweis: In einer späteren Aufgabe werden wir Kreisevolventen zur Beschreibung von Zahnrädern benutzen.

Aufgabe 15 – Mengen von Geraden bzw. von Ebenen als metrische Räume

a) Definieren Sie eine Metrik auf der Menge der (i) Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^3$, (ii) Ebenen des $\mathbb{R}^3$ durch 0, (iii) Geraden des $\mathbb{R}^3$.
Hinweis: Beschreiben Sie zunächst diese Mengen in übersichtlicher Weise. Es ist erwünscht, aber nicht verlangt, Metriken zu finden, die mit den Isometrien des $\mathbb{R}^3$ vertauschen. Im Fall (iii) ist uns eine solche Metrik in expliziter Form nicht bekannt, wir werden später aber deren Existenz beweisen.

b) Geben Sie z.B. für (ii) eine rektifizierbare Verbindung zwischen zwei Elementen an. Sind die abgeschlossenen Kugeln kompakt?

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 5 Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann 15. November 2000

Aufgabe 16 – Begleitende Dreibeine und Röhren

Es sei $B(t) := (\dot c(t), v(t), w(t))$ ein begleitendes orthonormales Dreibein einer regulären C^2-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$.

a) Für kleines ε hat die *Röhre* $F_\varepsilon(t,\varphi) := c(t) + \varepsilon(\cos\varphi\, v(t) + \sin\varphi\, w(t))$ reguläre Parameterlinien $t \mapsto f_\varepsilon(t,\varphi)$ und $\varphi \mapsto f_\varepsilon(t,\varphi)$. Zeigen Sie, daß diese Linien genau dann für alle (t,φ) senkrecht aufeinander stehen, wenn die Differentialgleichungen $\dot v(t) = a(t)\dot c(t)$ und $\dot w(t) = b(t)\dot c(t)$ gelten für zwei Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$.

b) Konstruieren Sie für eine gegebene Kurve c ein begleitendes orthonormales Dreibein B, das eine Röhre mit senkrechten Parameterlinien erzeugt. Als Ansatz wählen Sie dazu v, w beliebig und erfüllen dann durch Basiswechsel die Differentialgleichungen.

Aufgabe 17 – Eingebettete Tori in $\mathbb{R}^3$ und Satz des Pythagoras

Der Standardtorus $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ wird durch

$$F_{r,R}(s,t) := \begin{pmatrix} (R + r\cos s)\cos t \\ (R + r\cos s)\sin t \\ r\sin s \end{pmatrix}$$

für $R > r > 0$ nach $\mathbb{R}^3$ abgebildet.

a) Zeigen Sie daß die Tori $F_{r,\sqrt{1+r^2}}$ disjunkt sind. Welche Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist das Bild der Schar $(r,s,t) \mapsto F_{r,\sqrt{1+r^2}}(s,t)$ für $r > 0$, $s,t \in T^2$? (Siehe auch die nächste Frage)

b) Prüfen Sie nach, daß die Tori $F_{r,\sqrt{1+r^2}}$ Niveauflächen $\{f = R^2\}$ der außerhalb der z-Achse definierten Funktion $f(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2+1)^2/(4(x^2+y^2))$ sind. Berechnen Sie, wo $\operatorname{grad} f \neq 0$ ist; gehen Tori durch diese Punkte?

c) Die Sphären $\{x^2 + y^2 + (z-m)^2 = 1 + m^2\}$ enthalten den Einheitskreis in der x,y-Ebene. Warum werden die Tori $F_{r,\sqrt{1+r^2}}$ von diesen Sphären senkrecht geschnitten?

d) Wir betrachten für eine beliebige Banachraum-Metrik d auf $\mathbb{R}^3$ die induzierte Metrik auf $F_{r,R}(T^2)$ oder direkt auf T^2. Warum lassen sich je zwei Punkte durch eine Kürzeste verbinden?

e) Warum sind die folgenden drei Metriken auf T^2 äquivalent: (i) die von $\mathbb{R}^3$ über F induzierte Metrik, (ii) die zur induzierten Metrik gehörende innere Metrik, sowie (iii) $d((s,t),(\sigma,\tau)) := |(s-\sigma) \bmod 2\pi| + |(t-\tau) \bmod 2\pi|$?

Aufgabe 18 – Bahnen von Isometrien

Die orientierungstreuen Isometrien der Ebene $(A,a) \in \mathbf{SO}(2)\times\mathbb{R}^2$ operieren auf $\mathbb{R}^4$ durch $(A,a) * (x,y) := (Ax + a, Ay + a)$, für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.

a) Beschreiben Sie die Bahnen als eine *Quadrik* in $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, d.h. als Niveaufläche einer quadratischen Funktion.

b) Die Operation ist isometrisch in $\mathbb{R}^4$ (bezüglich einer geeignet zu wählenden Metrik).

c) Bestimmen Sie den Abstand zweier Bahnen.

d) Wie kann man die Menge aller Bahnen beschreiben?

Aufgabe 19 – Zahnräder

Auf der Rückseite sind Kreisevolventen-Zahnräder skizziert. Im letzten Jahrhundert wurden für schwere Maschinen Zahnräder eingesetzt, die konstante Winkelgeschwindigkeit erhalten; solche Zahnräder vermeiden Schwingungen. Eine andere Anforderung stellt man an Zahnräder von Uhren: ihre Flanken sollen ohne Rutschen aneinander abrollen, um den Verschleiß klein zu halten.

a) Zeigen Sie: für Kreisevolventen-Zahnräder ist das Übersetzungsverhältnis $\omega_1 : \omega_2$ zeitlich konstant, und zwar ist es $R_2 : R_1$.

b) Mit welcher (veränderlichen) Geschwindigkeit rutschen die Flanken aufeinander?

c) Falls die Flanken sich so gleichmäßig abnutzen, daß sie Evolventen bleiben, kann man dann durch Änderung des Achsabstandes die Zahnräder nachjustieren?

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 6 Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann 22. November 2000

Aufgabe 20 – Einschaliges Hyperboloid als Rotationsfläche

Es sei $c = (c_1, c_2, c_3) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $\dot{c}_3 > 0$, $c_1^2 + c_2^2 > 0$.

a) Wir betrachten die *Rotationsfläche*, die durch Drehung von c um die z-Achse entsteht. Der Schnitt der Fläche mit der x, z-Ebene ($x > 0$) heißt *Meridiankurve*. Geben Sie die die Meridiankurve $m(t)$ an sowie eine Parametrisierung der Rotationsfläche.

b) Als Beispiel betrachten wir die Gerade $c(t) = e_2 + t(e_1 + e_3)$. Die Rotation von c erzeugt eine Schar von Geraden auf der Rotationsfläche; bestimmen Sie eine weitere Schar von Geraden. Bestimmen Sie die Meridiankurve, und beschreiben Sie die Fläche auch als Niveau einer quadratischen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 21 – Differentialgleichungen für Höhen- und Böschungslinien

Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert eine Fläche als Niveau $\{f(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Wir setzen $\operatorname{grad} f \neq 0$ auf der Fläche voraus.

a) Definieren Sie ein ein horizontales Vektorfeld H auf U, das tangential an die Fläche ist. Welche Differentialgleichung beschreibt dann die *Höhenlinien* $f(x, y, \text{const.}) = 0$? Ist sie lösbar?

b) Um die *Fallinien* der Fläche analog zu beschreiben, definieren Sie ein an die Fläche tangentiales Vektorfeld F, das senkrecht auf H steht.

c) Kurven auf einer Fläche, deren Tangente einen konstanten Winkel $90° - \alpha$ mit der Vertikalen e_3 einschließt, heißen *Böschungslinien*. Diese Kurven haben konstante Steigung $\tan \alpha$ und wurden früher möglichst zur Trassierung steiler Eisen- und Zahnradbahnen benutzt. Geben Sie das entsprechende Vektorfeld $B(\alpha)$ an.

d) Als Beispiel rechnen Sie bitte $f(x, y, z) = z - xy$. Wählen Sie eine geeignete Normalisierung der Vektorfelder zur Integration.

Aufgabe 22 – Hopf-Kreise in $\mathbb{S}^3$

Auf $\mathbb{R}^4$ operiert $\mathbb{C}$ durch Multiplikation, wenn wir $\mathbb{R}^4$ als den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ auffassen.

a) Welche 4×4-Matrix stellt die Multiplikation mit i bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (i, 0)$, $e_3 = (0, 1)$, $e_4 = (0, i)$ dar?

Wir schreiben $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \bmod 2\pi$ und betrachten $\mathbb{S}^3$ mit der inneren Metrik.

b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{S}^1$ durch die *Hopf-Operation* $\varphi * p := e^{i\varphi} p = p \cos\varphi + (ip) \sin\varphi$ isometrisch auf $\mathbb{S}^3$ operiert. Ihre Bahnen sind die *Hopf-Kreise* (oder *-Fasern*) in $\mathbb{S}^3$. Wie operiert $\varphi = \pi/2 \in \mathbb{S}^1$?

c) Betrachten Sie ein $q \in \mathbb{S}^3$, das als $\mathbb{R}^4$-Vektor senkrecht auf $p, ip \in \mathbb{S}^3$ steht. Geben Sie alle solchen q an. Zeigen Sie, daß jeder Großkreis $c(s) = p \cos s + q \sin s$ von den Hopf-Kreisen $\varphi * c(s) = e^{i\varphi} c(s)$ senkrecht geschnitten wird (in wievielen Punkten?).

d) Verläuft $c : I \to \mathbb{S}^3$ senkrecht zu den Hopf-Kreisen, so ist die Länge von c gleich der Länge von $\varphi * c$ im Bahnenraum (mit innerer Metrik).

e) Folgern Sie aus c) und d), daß zwei Hopf-Kreise höchstens $\pi/2$ voneinander entfernt sind und es zu jedem Hopf-Kreis genau einen im Abstand $\pi/2$ gibt.

f) Beschreiben Sie die Menge der Hopf-Kreise, die von einem gegebenen Hopf-Kreis den Abstand $r \in (0, \pi/2]$ haben, als stetige Kurve. Bestimmen Sie den Umfang dieses Abstandskreises. Wie können Sie also die Menge der Bahnen als eine 2-Sphäre auffassen? (Wenn die 2-Sphäre die Bahnen isometrisch repräsentiert, welchen Radius hat sie?) Daher spricht man üblicherweise von der *Hopf-Faserung* über $\mathbb{S}^2$ mit Fasern $\mathbb{S}^1$.

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 7 Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann 29. November 2000

Aufgabe 23 – Stereographische Projektion

Wir definieren zwei Abbildungen $\mathrm{St}_\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n - \{(0,\pm 1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch $x \mapsto (f(x)x, \pm(f(x)-1))$ für $f(x) := 2/(1+|x|^2)$. Die Umkehrabbildung ${\mathrm{St}_\pm}^{-1}$ projiziert $\mathbb{S}^n \pm (0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von einem Pol nach $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Bestimmen Sie den *Kartenwechsel* ${\mathrm{St}_-}^{-1} \circ \mathrm{St}_+ : \mathbb{R}^n - 0 \to \mathbb{R}^n - 0$.

b) Es sei $x(t)$ eine differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $T\mathrm{St}_+ \dot{x}(t)$ für $\frac{d}{dt}(\mathrm{St}_+ \circ x(t))$. Bestimmen Sie $\lambda(x)$ in $\langle T\mathrm{St}_+\dot{x}(t), T\mathrm{St}_-\dot{x}(t)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \lambda(x(t))\langle \dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}$. Folgern Sie die Winkeltreue von St_+.

Aufgabe 24 – $\mathbf{O}(n)$ und Satz über implizite Funktionen

a) Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz. Wir bezeichnen die Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$ mit End, die symmetrischen Endomorphismen mit Sym und die schiefsymmetrischen mit Skew. Für $X, Y \in \mathrm{End}$ definieren wir $\langle X, Y\rangle := \mathrm{Spur}(X^tY) = \sum_{i=1}^n \langle Xe_i, Ye_i\rangle$, wobei e_i für eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ steht. Zeigen Sie, daß $\langle .,.\rangle$ ein Skalarprodukt ist, und $\mathrm{End} = \mathrm{Sym} \oplus \mathrm{Skew}$ eine orthonormale Zerlegung darstellt; welche Dimensionen haben die Summanden?

Durch $F(A) := A^tA$ wird eine Abbildung $F : \mathrm{End} \to \mathrm{Sym}$ definiert.

b) $\mathrm{Kern}(TF|_{\mathrm{id}}) = \mathrm{Skew}$ und $\mathrm{Bild}(TF|_{\mathrm{id}}) = \mathrm{Sym}$.

c) Aus welchen Endomorphismen besteht die Niveaumenge $F^{-1}(\mathrm{id})$? Wir möchten Teil b) auf diese Menge ausdehnen. Schreiben Sie dazu durch $U \in F^{-1}(\mathrm{id})$ eine differenzierbare Kurve der Form $UX(t) \in \mathrm{End}$ mit $X(0) = \mathrm{id}$ und $X(t) \in \mathrm{End}$ vor; folgern Sie $\mathrm{rang}(TF) = \dim(\mathrm{Sym})$ längs $F^{-1}(\mathrm{id})$.

d) Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um lokal die Niveaumenge $F^{-1}(\mathrm{id}) \subset \mathrm{End}$ differenzierbar zu parametrisieren. Verwenden Sie dabei den Hilfssatz. (Vielleicht hilft es Ihnen, zunächst alles in $\mathbb{R}^{n^2}$ zu betrachten?)

Aufgabe 25 – Längentreue der Veroneseabbildung

Die Isometriegruppe $G = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$ von $\mathbb{S}^n$ ergibt als Bahnenraum den n-dimensionalen *projektiven Raum* $\mathbb{R}P^n$. Er besteht aus der Menge von Antipodenpunkten der Sphäre, oder aus den eindimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^{n+1}$. Durch $p_x \in \mathrm{Sym}(n+1)$, $p_x(v) := \langle v, x\rangle x$ wird auf den durch $x \in \mathbb{S}^n$ aufgespannten Unterraum projiziert.

a) Die Abbildung $V : \mathbb{R}P^n \to \mathrm{Sym}(n+1)$, $[x] \mapsto p_x$ ist wohldefiniert und injektiv.

b) Für jedes $U \in \mathbf{O}(n+1)$ gilt $p_{Ux} = U \circ p_x \circ U^{-1}$, und die Abbildung $S \mapsto \tilde{U}(S) := U \circ S \circ U^{-1}$ von $\mathrm{Sym}(n+1)$ in sich selbst ist eine Isometrie bezüglich des Skalarprodukts $\langle A, B\rangle_{\mathrm{End}} = \mathrm{Spur}(A^tB)$. Daher gibt es zu jeder Isometrie $U \in \mathbf{O}(n+1)$ von $\mathbb{R}P^n$ eine Isometrie $\tilde{U}$ von $\mathrm{Sym}(n+1)$ mit $V[U(x)] = \tilde{U}(V[x])$.

c) Es sei $x(t)$ eine C^1-Kurve in $\mathbb{S}^n$. Berechnen Sie $DV\dot{x}(t)$, und zeigen Sie, daß V eine Einbettung $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathrm{Sym}(n+1)$ ist, die bis auf eine Konstante längentreu ist, d.h. $\langle \frac{d}{dt}p_x, \frac{d}{dt}p_x\rangle_{\mathrm{End}} = \mathrm{const}\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Sie heißt *Veronese-Einbettung*. Nach dem vorigen Teil wird jede Isometrie von $\mathbb{R}P^n$ auf der Einbettung durch eine Isometrie des umgebenden Raums $\mathrm{Sym}(n+1)$ realisiert.

d) Statt nach $\mathrm{Sym}(n+1)$ wollen wir nun nach $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2-1}$ einbetten. Aus $\mathrm{Sym}(n+1) \to \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}$ gewinnt man für das Beispiel des $\mathbb{R}P^2$ zunächst eine längentreue Abbildung $(x,y,z) \mapsto (x^2/\sqrt{2}, y^2/\sqrt{2}, z^2/\sqrt{2}, yz, xz, xy)$ in die Sphäre $\mathbb{S}^5(1/\sqrt{2})$ vom Radius $1/\sqrt{2}$. Das Bild liegt sogar in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^6$, so daß es eine isometrische Einbettung $\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^4(1/\sqrt{3}) \subset \mathbb{R}^5$ gibt, für die alle Isometrien von $\mathbb{R}P^2$ durch $\mathbf{O}(5)$ repräsentiert werden. Können Sie die Zwischenschritte angeben?

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 8   Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann   6. Dezember 2000

Aufgabe 26 – Geodätische auf Rotationsflächen, wichtige Rechenübung

Eine Kurve $u \mapsto (r, h)$ in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, die nach Bogenlänge parametrisiert ist (es gilt also $r'^2 + h'^2 = 1$), definiert eine *Rotationsfläche* $f : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ durch $f(u, \varphi) = (r(u)\cos\varphi,\, r(u)\sin\varphi,\, h(u))$.

a) Warum sind die *Meridiane* $u \mapsto f(u, \varphi)$ geodätische Linien?

b) Berechnen Sie die geodätische Krümmung der *Breitenkreise* $\varphi \mapsto f(u, \varphi)$.

c) Es sei $c(t) := (u(t), \varphi(t))$ eine Kurve im Parametergebiet. Berechnen Sie die Riemannsche Metrik $g(\binom{\dot u}{\dot\varphi}, \binom{\dot u}{\dot\varphi})$ und $\Gamma(\binom{\dot u}{\dot\varphi}, \binom{\dot u}{\dot\varphi})$ (zur Erinnerung: $Tf \cdot \Gamma := T^2 f^{\tan}$).

d) Der *vertikale Drehimpuls* einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c(t)$ ist durch $I_3(t) = \langle f \circ c(t) \times \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\,,\ (0, 0, 1)\rangle = r(c(t))\cos\psi(t)$ gegeben (ψ Schnittwinkel mit Breitenkreis). Zeigen Sie den *Satz von Clairaut*: c ist Geodätische genau dann, wenn I_3 konstant ist. Schneidet eine Geodätische also *einen* Breitenkreis mit einem bekannten Winkel, so kennt man den Schnittwinkel für *jeden* Breitenkreis.

e) Folgern Sie den *Sinussatz der sphärischen Geometrie* $\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$ für ein Dreieck in $\mathbb{S}^2$, dessen Winkel α, β, γ den Seiten mit Länge a, b, c gegenüberliegen. Legen Sie dazu eine Ecke des Dreiecks auf die Drehachse.

Aufgabe 27 – Geodätische in $\mathbf{SO}(n)$, Wiederholung

Wir definieren $\mathrm{Exp}A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (dabei sei $A^0 := \mathrm{id}$).

a) Die Reihe $\mathrm{Exp}A$ konvergiert für jedes $A \in \mathrm{End}$, so daß $\mathrm{Exp} : \mathrm{End} \to \mathrm{End}$.

Wir definieren durch $c(t) = \mathrm{Exp}\, tA := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k$ eine Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathrm{End}$.

b) Berechnen Sie $\dot c$, $\ddot c$, und zeigen Sie mit der Differentialgleichung von $\dot c$ die Identität $c(s + t) = c(s)c(t)$.

c) Für $A \in \mathrm{Skew}$ folgern Sie nun aus dem letzten Teil die folgenden Behauptungen.
   (*i*) Die Kurve $c(t)$ liegt in der Drehgruppe, $\mathrm{Exp}\, tA \in \mathbf{SO}(n)$,
   (*ii*) $|\dot c|$ ist konstant bezüglich der Metrik $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(A^t B)$, und
   (*iii*) *neu:* c ist Geodätische in $\mathbf{SO}(n)$, d.h. Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 28 – $\mathbb{S}^3$ als Gruppe von Einheitsquaternionen und $\mathbf{SO}(3)$, Interpretationsübung.

Es gibt eine nicht-kommutative Multiplikation, die $\mathbb{R}^4$ zum Schiefkörper der *Quaternionen* $\mathbb{H}$ macht. Es sei $\{1, i, j, k\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^4$. Die Multiplikation wird durch die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung der folgenden Regeln erklärt: $1u = 1$ für $u \in \{1, i, j, k\}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, sowie $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Analog zu $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definieren wir auch eine Konjugation durch die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung von $\bar 1 = 1$ und $\bar u = -u$ für $u \in \{i, j, k\}$. Schließlich setzen wir $\mathrm{Re}\, x := (x + \bar x)/2$ und $\mathrm{Im}\, x := x - \mathrm{Re}\, x$; wir identifizieren den Imaginärteil $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$.

a) Es gilt $\overline{xy} = \bar y \bar x$ und $x\bar x = \bar x x = |x|^2$, wobei die Norm von demjenigen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ induziert wird, das $\{1, i, j, k\}$ zu einer Orthonormalbasis macht.

b) Zeigen Sie $|xy| = |x||y|$ (Teil a) benutzen) und folgern Sie, daß die *Einheitsquaternionen* $\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$ eine Gruppe bilden.

c) Zu $x \in \mathbb{S}^3$ definieren wir $K_x : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ durch $K_x(y) := xyx^{-1}$. Zeigen Sie zunächst, daß $y^2 = -|y|^2$ genau für $y \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ (also $y = \mathrm{Im}\, y$) gilt. Folgern Sie $K_x(\mathrm{Im}\,\mathbb{H}) = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$. Warum ist K_x eine Isometrie von $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$?

d) Also wird durch $x \mapsto K_x$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{S}^3$ nach $\mathbf{O}(3)$ gegeben. Wieso liegt K_x sogar in $\mathbf{SO}(3)$? Warum spannt $\mathrm{Im}\, x \in \mathbb{R}^3$ die Drehachse von K_x auf (für $x \neq \pm 1$)? Wie groß ist der Drehwinkel (rechnen Sie nur $x = a + bi$, $y = j$ und argumentieren dann)? Damit ist $\mathbf{SO}(3)$ homöomorph zu $\mathbb{R}P^3$.

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 9 Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann 13. Dezember 2000

Aufgabe 29 – Riemannsche Metrik einer Fläche in Gaußscher Form

Eine Riemannsche Metrik g sei auf $U \subset \mathbb{R}^2$ in *Gaußscher Form*

$$g_{(u,v)}(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}) = X_1 Y_1 + G^2(u,v) X_2 Y_2$$

gegeben; dabei sei $G : U \to \mathbb{R}_+$ stetig differenzierbar. Wie wir später noch sehen werden, läßt sich jede Metrik auf hinreichend kleinen Flächenstücken in Gaußsche Form bringen.

a) Rechnen Sie mit $2g(\Gamma(X,Y),Z) = -(T_Z g)(X,Y) + (T_X g)(Y,Z) + (T_Y g)(Z,X)$ die Christoffelabbildung $\Gamma(X,Y)$ aus.

b) Die u-Parameterlinien $u \mapsto (u, \text{const})$ sind geodätisch.

c) Was ist die geodätische Krümmung der v-Linien?
Hinweis. Es ist leichter, ein Einheitsnormalenfeld $n \perp \dot{c}$ zu bestimmen als die Parameterlinien nach Bogenlänge umzuparametrisieren.

Aufgabe 30 – Geodätische auf dem Rotationstorus

Gegeben sei eine Drehfläche $F(u,\varphi) = \big(r(u)\cos\varphi, r(u)\sin\varphi, h(u)\big)$ mit $r'^2 + h'^2 = 1$ und $r > 0$. Weiter sei $c(t) = (u(t), \varphi(t))$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in dieser Fläche mit $r'(u(0)) < 0$ und $r(u(0))\cos\psi(0) = \lambda > 0$. Wir nehmen an, daß die Menge $\{u > u(0) \mid r(u) = \lambda\}$ nicht leer ist, und bezeichnen mit m ihr Minimum. Der entsprechende Breitenkreis sei $F \circ b$ mit $b : \varphi \mapsto (m, \varphi)$.

a) Zeigen Sie unter Benutzung des Satzes von Clairaut, daß $F \circ c$ dem Breitenkreis $F \circ b$ beliebig nahe kommt.

b) Falls b geodätisch ist, schneiden sich $F \circ c$ und $F \circ b$ nicht, so daß $F \circ c$ asymptotisch zum geodätischen Breitenkreis $F \circ b$ wird. Welche Eigenschaft hat der Radius eines solchen geodätischen Breitenkreises?

c) Diskutieren Sie nun die Geodätischen auf dem Rotationstorus mit $r(u) = R + \rho\cos u$, $h(u) = \rho \sin u$ für $R > \rho > 0$. Zeigen Sie, daß genau die drei auf der Rückseite von Blatt 8 angegebenen Fälle vorkommen.

d) Geben Sie eine Rotationsfläche an, für die eine Geodätische asymptotisch zu zwei verschiedenen Breitenkreisen wird (vorwärts und rückwärts).

Aufgabe 31 – Konform äquivalente Metriken und harmonische Funktionen

Zwei Riemannsche Metriken g, h auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ heißen *konform äquivalent*, wenn eine Funktion $\lambda : U \to \mathbb{R}_+$ existiert mit $g_p(X,Y) = \lambda^2(p) h_p(X,Y)$.

a) An jeder Stelle $p \in U$ stimmen die für die beiden Skalarprodukte $g|_p$ und $h|_p$ definierten Begriffe *Winkel, symmetrischer (bzw. schiefsymmetrischer) Endomorphismus* überein; Eigenwerte dagegen ändern sich, wie?

Im folgenden sei $h = \langle\ ,\ \rangle$ die Standardmetrik des $\mathbb{R}^n$ und g dazu konform äquivalent.

b) Berechnen Sie $\text{grad}_g f$ aus $\text{grad}_h f$. Verifizieren Sie, daß die Christoffelabbildung für g gegeben ist durch: $\lambda\,\Gamma(X,Y) = T_X\lambda\, Y + T_Y\lambda\, X - \langle X,Y\rangle \text{grad}_{\langle,\rangle}\lambda$. Finden Sie die Formel für die Spur der Christoffelabbildung, $\text{Spur}\,\Gamma(X,.) = \sum_i g(\Gamma(X,e_i),e_i)$, wobei e_i eine Orthonormalbasis (besser für g oder für h?) durchläuft.

c) Es sei $n = 2$; die (positive) $90°$-Drehung kürzen wir zur Erinnerung an die Multiplikation mit $i \in \mathbb{C}$ ab mit J. Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *g-harmonisch*, falls die Ableitung TV des Vektorfeldes $V := J \cdot \text{grad}_g f$ an jeder Stelle $p \in U$ g-symmetrisch ist. Zeige: Für $g = h$ gilt $\Delta f = \text{Spur}\; T\text{grad} f = 0$, und: Die Definition "$f$ ist g-harmonisch" sagt für alle zu h konformen Metriken $g = \lambda^2 \cdot h$ dasselbe.

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 10 Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann 20. Dezember 2000

Aufgabe 32 – Geodätische auf dem Kegel
Es sei $C(\alpha) \subset \mathbb{R}^3$ ein Rotationskegel mit Öffnungswinkel 2α.

a) Bilde einen Sektor in $\mathbb{R}^2$ längentreu auf den Kegel ab ("Abwicklung") und beschreibe damit die Geodätischen auf dem Kegel (ohne den Punkt an der Spitze).

b) Wirf ein Lasso über die Kegelspitze, dessen Schlinge Länge l hat. Nimm idealisierend an, daß das Seil keine Dicke hat (und daher gewichtslos ist), daß es reibungslos auf dem Kegel gleitet (auch in der Öse); wir ziehen genau radial von der Spitze weg. Für welche Werte von α sitzt das Lasso fest, für welche rutscht es nach oben ab?

c) Betrachte in dem ebenen Sektor das Urbild eines Breitenkreises des Kegels und wähle ein paralleles Einheitsvektorfeld längs dieser Urbildkurve. Bilde dies parallele Vektorfeld mit der (Ableitung der) Abwicklung auf ein Vektorfeld längs des Breitenkreises ab. Wie groß ist der Winkel zwischen dem Anfangsvektor und dem Endvektor (gleicher Fußpunkt)? Zeige, daß die Ableitung des Vektorfeldes proportional zum Tangentialfeld des Breitenkreises ist.

Aufgabe 33 – Katenoid und Helikoid
Wir definieren zwei Flächen $K, W : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$K(\varphi, h) = \begin{pmatrix} \cosh h \cos\varphi \\ \cosh h \sin\varphi \\ h \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W(\varphi, h) = \begin{pmatrix} \sinh h \sin\varphi \\ -\sinh h \cos\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

K ist injektiv auf $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und Rotationsfläche der Kettenlinie, weshalb die Fläche als *Kettenfläche* oder *Katenoid* bezeichnet wird. W heißt *Wendelfläche* oder *Helikoid.*

a) K und W definieren dasselbe Riemannsche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und dieses ist winkeltreu zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

b) Beide Flächen haben dieselbe Normalenabbildung $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$.

c) Berechnen Sie die Weingartenabbildungen S_K und S_W und zeigen Sie $\operatorname{Spur} S_K = \operatorname{Spur} S_W$ und $\det S_K = \det S_W$. Welche Beziehung besteht zwischen S_K und S_W?

Aufgabe 34 – Krümmungslinien auf Röhren vgl. Aufgabe 16

a) Auf jeder Fläche gilt: Eine ebene nicht gerade Geodätische ist Krümmungslinie.

Betrachte nun die Röhre $F_\epsilon(t, \varphi) := c(t) + \varepsilon(\cos\varphi\, v(t) + \sin\varphi\, w(t))$ wobei $\dot c, v, w$ ein c begleitendes orthonormales Dreibein sei, das wie in Aufgabe 16 $\dot v = a\dot c$, $\dot w = b\dot c$ erfüllt.

b) Die Kreise $\varphi \mapsto F_\varepsilon(t, \varphi)$ sind Geodätische und Krümmungslinien der Röhre.

c) Warum sind die Linien $t \mapsto F_\varepsilon(t, \varphi)$ Krümmungslinien? Welchen Winkel bilden sie mit den Kreisen? Was ist ihr Krümmungsradius als Funktion von $a, b, \varepsilon, \varphi$?

d) Geben Sie *ohne weitere Rechnung* die Weingartenabbildung der Röhre an.

Aufgabe 35 – Rotationsflächen konstanter Krümmung ($\det S$ bzw. Spur S)
$F(u, \varphi) := (r(u)\cos\varphi, r(u)\sin\varphi, h(u))$ sei eine Rotationsfläche wie in Aufgabe 26. Die Relation $h'^2 = 1 - r'^2$ erlaubt es, die Weingartenabbildung S in eine Form zu bringen, die nur Ableitungen von r enthält (laut Vorlesung oder durch Rechnen).

a) Schreiben Sie $\det S = \text{const}$ und $\operatorname{Spur} S = \text{const}$ als Differentialgleichung für $r(u)$.

b) Löse die Differentialgleichung für r im Fall $\det S = 0$, skizziere die Rotationsflächen.

c) Löse die Differentialgleichung für r, falls $\det S = \pm 1$. Verstehe h gut genug, um die Meridiankurven skizzieren zu können (für jedes Vorzeichen von $\det S$ nur ein Beispiel).

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 11 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **10. Januar 2001**

Aufgabe 36 – Asymptotenlinien auf Flächen im $\mathbb{R}^3$

Auf einer parametrisierten Fläche F sei eine Kurve $c = F \circ \gamma$ gegeben. Der Tangentialvektor $\dot{c}(t)$ ist *Asymptotenrichtung*, wenn die Normalkrümmung in t verschwindet, d.h. $0 = \langle \ddot{c}, N \circ \gamma \rangle = \langle D^2 F_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), N \circ \gamma \rangle = -\langle DF\,\dot{\gamma}, DF \cdot S\dot{\gamma} \rangle = -g(\dot{\gamma}, S \cdot \dot{\gamma})$.

Gilt dies für alle t, so heißt c *Asymptotenlinie*.

a) Geraden auf Flächen sind stets Asymptotenlinien, und geodätische Asymptotenlinien sind Geraden.

b) In Punkten mit $\det S > 0$ gibt es keine Asymptotenrichtung.

c) In Punkten mit $\det S < 0$ gibt es genau zwei Asymptotenrichtungen, deren Winkelhalbierende die beiden Krümmungsrichtungen sind. Der Winkel zwischen den Asymptotenrichtungen bestimmt das Verhältnis κ_1/κ_2 der Hauptkrümmungen.

Aufgabe 37 – Schnitt zweier Flächen längs Krümmungslinien

Wir nehmen an, daß sich zwei parametrisierte Flächen F_1 und F_2 längs einer Kurve $c(t)$, $c = F_i \circ \gamma_i$ (für $i = 1{,}2$) *unter konstantem Winkel schneiden.* N_i sei ein Normaleneinheitsfeld von F_i und $\tilde{N}_i(t) := N_i \circ \gamma_i(t)$ die Einschränkung längs der Schnittkurve. Ist c nun Krümmungslinie in der einen Fläche, dann auch in der anderen. Um diesen Satz zu beweisen, zeigen Sie bitte die folgenden Schritte.

a) Die Kurve c ist genau dann Krümmungslinie auf F_i, wenn es Funktionen κ_i gibt mit $\frac{d}{dt}\tilde{N}_i(t) = \kappa_i(t)\dot{c}(t)$.

b) $\frac{d}{dt}\langle \tilde{N}_1(t), \tilde{N}_2(t) \rangle = 0$.

c) Zum Beweis der Behauptung zerlegen Sie $\frac{d}{dt}\tilde{N}_2$ bezüglich des Dreibeins $\{\dot{c}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2\}$.

Aufgabe 38 – Das Poincaré-Modell des $\mathbb{H}^n$

Es sei $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle^L = -1,\ x_0 > 0\}$ der n-dimensionale hyperbolische Raum mit der von der Lorentz-Bilinearform $\langle x, y \rangle^L := \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_0 y_0$ induzierten Metrik.

a) Wir hatten die *stereographische Projektion St* des offenen Einheitsballes B^n in der Hyperebene $\{x_0 = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vom Punkt $(0, \dots 0, -1)$ nach H definiert durch

$$St(x) := \frac{1}{1 - \langle x, x \rangle^L} \cdot (2x; 1 + \langle x, x \rangle^L).$$

Geben Sie die Umkehrabbildung an.

b) Das Poincaré-Modell ist winkeltreu (konform): es gibt eine Funktion $\lambda : B^n \to \mathbb{R}$ mit $\langle TSt\ X, TSt\ X \rangle^L = \lambda^2(p)\langle X, X \rangle$ für $p \in B^n$ und X Tangentialvektor an B^n in p.

Aufgabe 39 – Pflasterungen der hyperbolischen Ebene

a) Es seien $0 < \alpha, \beta < \pi$, $\gamma = \pi/2$ die Winkel eines rechtwinkeligen hyperbolischen Dreiecks. Berechnen Sie die Seitenlängen und zeigen Sie, daß das Dreieck genau dann existiert, wenn $\alpha + \beta < \pi/2$. Es gibt daher für alle m, n mit $1/m + 1/n < 1/2$ ein Dreieck mit Winkeln $\alpha = \pi/m$, $\beta = \pi/n$, das die hyperbolische Ebene pflastert.

b) Betrachten Sie nun ein regelmäßiges hyperbolisches n-Eck mit Seitenlänge a und (Innen-)Winkel φ. Berechnen Sie $a(\varphi)$, sowie Inkreisradius r und Umkreisradius R, indem Sie das n-Eck in $2n$ Dreiecke zerlegen. Für welche $n, k \geq 3$ finden Sie eine Pflasterung mit n-Ecken, so daß sich k verschiedene n-Ecke in den Ecken treffen? Vergleichen Sie mit der euklidischen Situation.

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 12 Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann 17. Januar 2001

Aufgabe 40 – Normalenflächen mit $\det S = 0$ **von Kurven**

Es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und v ein zu c normales Einheitsvektorfeld also $|v| = 1$, $\langle v, \dot c\rangle = 0$. Zusätzlich sei die Parallelitätsbedingung $\dot v(t) = a(t)\dot c(t)$ erfüllt. Die *v-Normalenfläche* von c sei durch $F(s,t) := c(t) + sv(t)$ definiert.

a) Für welche (s,t) ist F regulär? Zeigen Sie, daß alle s-Linien von F Krümmungslinien sind. $\det S =$? Die anderen Krümmungslinien? Bestimmen Sie $g(.,.) := \langle TF., TF.\rangle$.

b) Bestimmen Sie die Krümmungslinien mit den Ergebnissen der Aufgaben 16, 34, 37.

Aufgabe 41 – Abschätzungen für Kurven mit Krümmungsschranken

Es sei $c : [0,l] \to \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve, deren Krümmung durch $|\kappa(t)| := |\ddot c(t)| \le 2K$ beschränkt sei.

a) Zeigen Sie, daß für die Bogenlänge l und die Sehnenlänge $s := |c(l) - c(0)| = \left|\int_0^l \dot c(t)dt\right|$ die (für kleine l interessante) Abschätzung $0 \le l - s \le Kl^2$ gilt.
Hinweis: Schreiben Sie $l = |\int_0^l c'(0)|$.

b) Welche Abschätzung gewinnen Sie aus a) für den Einheitskreis?

c) Sind $v, w \in \mathbb{R}^n$ und ist $v \ne 0$, $|w| = 1$, so gilt $|\sin\measuredangle(v,w)| \le |v - w|$.

d) Es sei $\varphi := \measuredangle\big(c(l) - c(0), \dot c(0)\big) \in (-\pi, \pi]$ der Winkel zwischen Sehne und Tangente. Zeigen Sie die für hinreichend kleine $l > 0$ gültige Abschätzung $|\varphi| \le \arcsin(Kl)$.
Hinweis: Benutzen Sie c) mit $v = \big(c(l) - c(0)\big)/l$.

Aufgabe 42 – Hyperbolische Isometrien, Drehungen um Fernpunkte

Wir betrachten die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2 \subset (\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle^L)$. Es seien

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S(r) := \begin{pmatrix} -\cosh r & 0 & \sinh r \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh r & 0 & \cosh r \end{pmatrix}$$

Drehung um $p = (0,0,1)$ und Spiegelung, die p mit $c(r) := (\sinh r, 0, \cosh r)$ vertauscht.

a) Berechnen Sie die Drehung $R_{r,\varphi} = S(r)D(\varphi)S^{-1}(r)$ um $c(r)$ mit Winkel φ.

b) Bestimmen Sie $\varphi(t,r)$ so, daß die Bahnkurve $t \mapsto R_{r,\varphi(t,r)}(0,0,1)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

c) Sie können nun die Schar $P(t) = \lim_{r\to\infty} R_{r,\varphi(t,r)}$ von Lorentz-Isometrien ausrechnen. Zeigen Sie, daß die Isometrien $P(t)$ die von der Geodätischen $c(r)$ aufgespannte Ebene in $\mathbb{R}^3$ auf Ebenen abbilden, die alle die Asymptote $\mathbb{R}(1,0,1)$ des Hyperboloids enthalten. In diesem Sinne ist $P(t)$ eine Lorentz-Drehung um den *Fernpunkt* $\lim_{r\to\infty}(\sinh r, 0, \cosh r)$. Übrigens ist der entsprechende Grenzwert von Drehungen in $\mathbb{R}^2$ eine Translation.

Aufgabe 43 – Platonische Polyeder, speziell Würfel in $\mathbb{H}^3$

Betrachte im *Tangentialraum* eines Punktes $p \in \mathbb{H}^3$ ein Platonisches Polyeder mit Mittelpunkt 0; die Vektoren zu den Eckpunkten seien die Anfangsrichtungen von Geodätischen. Jede Kugel um p in $\mathbb{H}^3$ schneidet diese Geodätischen in den Ecken eines *hyperbolischen Platonischen Polyeders* mit Mittelpunkt p. Die Symmetriegruppen des euklidischen und des hyperbolischen Polyeders stimmen also überein. Die Symmetrieebenen zerlegen z.B. einen hyperbolischen Würfel W in 48 gleiche (nicht regelmäßige) hyperbolische Tetraeder. Dessen Kantenlängen sind: Inkugelradius r, Umkugelradius R; Inkreisradius ρ, halbe Kantenlänge $a/2$ und halbe Diagonale $D/2$ eines Seitenquadrates von W, schließlich die halbe Diagonale $d/2$ eines Mittenquadrates. Die Winkel der Tetraederdreiecke sind am Würfelmittelpunkt bekannt und stimmen mit denen des euklidschen Würfels überein (wieso?), daneben tauchen viele rechte Winkel auf. Berechnen Sie, als Funktionen von R, die übrigen Längen sowie die Winkel der Seiten- und Mittenquadrate.

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 13 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **24. Januar 2001**

Aufgabe 44 – Tangentenfläche einer Kurve, Rückseite: einer Schraubenlinie

Die Fläche $F(s,t) = c(t) + s\dot{c}(t)$ bezeichnen wir als *Tangentenfläche* der nach Bogenlänge parametrisierten zweimal stetig differenzierbaren Kurve c mit $\ddot{c}(t) \neq 0$.

a) Für welche (s,t) ist F regulär? Warum wohl heißt die Kurve c *Gratlinie* der Tangentenfläche? Zeigen Sie, daß die s-Linien Krümmungslinien mit Hauptkrümmung 0 sind und damit $\det S = 0$ gilt. Wie hängt das Normalenfeld N von F längs dieser Krümmungslinien mit der Frenetbasis von c zusammen?

b) Berechnen Sie die andere Hauptkrümmung aus den Frenetdaten von c. Erleichtern Sie sich die Rechnung, indem Sie die reparametrisierte Fläche $\tilde{F}(s,t) := F(s-t,t)$ betrachten. Aus welcher anderen Aufgabe folgt das Ergebnis längs jeder s-Linie bis auf eine Konstante?

c) Wie lautet die Riemannsche Metrik für $\tilde{F}$?

d) Im Falle einer ebenen Kurve c stellen die t-Linien von $\tilde{F}$ (Reparametrisierung von F) Ihnen bekannte zu c gehörende Kurven dar, welche?

Aufgabe 45 – Kommutierende ebene Vektorfelder

Die Lieklammer zweier Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ ist stets von der Form $[X,Y] = aX + bY$, warum? Wir setzen $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als Lipschitz-stetige Funktionen voraus.

a) Wir nehmen an, daß in $p \in \mathbb{R}^2$ gilt $[X,Y]_p \neq 0$. Lösen Sie eine Differentialgleichung, um die Vektorfelder so zu reskalieren, daß sie in einer Umgebung $U(p)$ *kommutieren*; zeigen Sie also, daß es (nicht identisch verschwindende) Funktionen $f, g : U(p) \to \mathbb{R}$ gibt mit $[fX, gY] = 0$.

b) Kann man auch zwei gegebene Vektorfelder in $\mathbb{R}^3$ so reskalieren, daß sie kommutieren?

Aufgabe 46 – Beispiel nicht-integrabler Daten für eine Fläche

Wir definieren rotationssymmetrische Daten für eine Fläche, und zwar wählen wir die Standardmetrik als vom Fußpunkt unabhängige Riemannsche Metrik $g_{r,\varphi} := \langle .,. \rangle$ und die nur vom Radius r abhängige Weingartenabbildung $S_{r,\varphi} := (1+r^2)\,\mathrm{id}$. Spezialisieren Sie die Flächengleichungen hierfür und zeigen Sie, daß diese Daten längs radialer Strahlen zu einer Fläche integriert werden können, die jedoch, außer im Aufpunkt ($r=0$), nicht g, S als Metrik und Weingartenoperator hat.

Diese Aufgabe soll Ihnen belegen, wie das Verfahren zum Beweis von Bonnets Hauptsatz der Flächentheorie stets eine Fläche liefert; sie besitzt die gewünschten Daten allerdings nur dann, wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind; diesen Existenzbeweis zeige ich noch.

Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 14 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **31. Januar 2001**

Letztes Aufgabenblatt des WS, nicht alle Voraussetzungen am 31.1. vorhanden.

Aufgabe 47 – Dreifach orthogonale Flächenscharen vgl. Rückseite

Auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ seien drei Flächenscharen gegeben, die sich paarweise senkrecht schneiden. Es sei N_i das Normalenfeld an die i-te Flächenschar, $i = 1, 2, 3$.

a) An die Schnittkurve zweier Flächen aus verschiedenen Scharen ist das Normalenfeld der dritten Schar tangential.

b) Zeigen Sie mit der Symmetrie der Weingartenabbildung $\langle D_{N_i} N_j,\ N_k \rangle = 0$ für $i \neq j, k$.

c) Beweisen Sie nun Dupins Satz: Zwei Flächen einer dreifach orthogonalen Flächenschar schneiden sich in Krümmungslinien.

d) *Beispiele*: Die Röhren um eine Raumkurve c (Aufg. 16, 34) und die Normalebenen von c schneiden sich in Krümmungslinien (Aufg. 37). Die von im Normalenbündel *parallelen* Vektorfeldern längs c erzeugten Flächen (Aufg. 40) schneiden die beiden anderen orthogonal, also in Krümmungslinien. (Man kann sogar jedes orthogonale Netz in einer Normalebene normal-parallel verschieben.)

Aufgabe 48 – Eine Konsequenz der Codazzi-Gleichungen

Wir betrachten eine Fläche mit zwei unterschiedlichen Hauptkrümmungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

a) Zeigen Sie durch kovariantes Differenzieren von $Se_i = \lambda_i e_i$ (für $i = 1, 2$) und unter Benutzung der Codazzi-Gleichungen, daß die geodätische Krümmung der Krümmungslinien zur Hauptkrümmung λ_2 erfüllt $\kappa_{g,2} = D\lambda_2(e_1)/(\lambda_1 - \lambda_2)$. Geben Sie auch die entsprechende Formel für die geodätische Krümmung $\kappa_{g,1}$ der anderen Schar von Krümmungslinien an. Welchen Ausdruck erhalten Sie für die Lieklammer $[e_1, e_2]$?

Wir setzen von nun an $\mathrm{Rang}(S) = 1$ voraus, also z.B. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

b) Warum sind die entsprechenden Krümmungslinien Geraden und die Krümmungslinien zu λ_2 Parallelkurven?

c) In der Vorlesung wurde (evtl. später) für Parallelkurven die *Ricatti-Gleichung* $\kappa_g' = -\kappa_g^2 - \det S$ gezeigt. Folgern Sie, daß (wie bei jedem Kegel) $1/\lambda_2$ linear ist.

Aufgabe 49 – Eine Symmetrie des Krümmungstensors R

Benutzen Sie **nur**, daß der R in seinen drei Argumenten $X, Y, Z \mapsto R(X,Y)Z$ linear ist und daß die Identitäten (*i*) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$, (*ii*) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ und (*iii*) $g(R(X,Y)U,V) = -g(R(X,Y)V,U)$ gelten, um $g(R(X,Y)U,V) = g(R(U,V)X,Y)$ zu zeigen.

Aufgabe 50 – Vergleich von Jacobifeldern auf Flächen (Definition bis 7.2.)

Es seien zwei nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische c_1, c_2 auf Flächen gegeben. Wir betrachten normale Jacobifelder $J_1 = a\ \mathrm{Rot}(90°)\,\dot{c}_1$ und $J_2 = b\ \mathrm{Rot}(90°)\,\dot{c}_2$ längs dieser Geodätischen, und nehmen für die jeweiligen Gauß-Krümmungen $K(t) \geq L(t)$ an.

a) Zeigen Sie den Vergleichssatz: Ist $a(0) = b(0)$, $a'(0) = b'(0)$ und $a > 0$ auf $(0, T)$, so folgt $a(t) \leq b(t)$ auf $[0, T]$. Dazu betrachten Sie logarithmische Ableitungen von a und b, nachdem Sie $a'b - ab'$ unter Benutzung der Jacobifeldgleichung differenziert haben.

b) Eine Lösung, die nicht identisch verschwindet, hat höchstens einfache Nullstellen (das heißt die Ableitung ist von 0 verschieden in jeder Nullstelle).