Was sollen die Grenzwerte und wie sind sie zu verstehen?

1. Mit was für Zahlen rechnen wir?

Die Zahlen des täglichen Lebens, einschließlich der gesamten Geschäftswelt, sind rationale Zahlen. Die Ein- und Ausgaben von Taschenrechnern sind (meist) 10-stellige Dezimalzahlen. Mit Ausnahme der symbolisch rechnenden Programme sind praktisch alle Ein- und Ausgaben in Computer rationale Zahlen, meistens Dezimalzahlen mit endlich vielen Stellen. Dabei wird nur ein winziger Bruchteil aller rationalen Zahlen benutzt. Das sieht man daran, dass es etwa zehnmal so viele 11-stellige Dezimalzahlen gibt wie 10-stellige, und jede Stelle mehr gibt ungefähr zehnmal so viele weitere Zahlen!

Warum ist dann immer, z.B. in allen Schulbüchern, von **reellen** Zahlen die Rede?

Ein wichtiger Grund ist, dass die Taschenrechner uns irreführen, wenn wir nicht verstehen, dass deren Ausgaben nur Approximationen sind. Wir haben gelernt, dass die meisten Quadratwurzeln, z.B. $\sqrt{2}$, irrationale Zahlen sind. Trotzdem gibt der Taschenrechner eine rationale Zahl als $\sqrt{2}$ aus. Bei der Exponentialfunktion ist es noch schlimmer, weil außer $\exp(0) = 1$ kein einziger ausgegebener Wert für $\exp(x)$ exakt richtig ist. Warum? Wir können nur rationale x eintippen und ein berühmter Satz (Lindemann-Weierstrass) besagt, dass die zugehörigen exakten Werte $\exp(x)$ irrational (genauer: sogar transzendent) sind. Bei den trigonometrischen Funktionen fangen die Probleme schon damit an, dass π eine transzendente Zahl ist, also weder exakt eingegeben noch ausgegeben werden kann.
Mit anderen Worten: Die Funktionen, mit denen wir hantieren wollen $(\sqrt{\ }, \exp, \sin, \ldots)$, zwingen uns, über irrationale Zahlen zu reden. Die rationalen und die irrationalen Zahlen zusammen bilden die reellen Zahlen.

2. Wie kann man über irrationale Zahlen reden, wenn man sie nicht hinschreiben kann?

Man kann reelle Zahlen nicht "einfach" als unendliche Dezimalzahlen definieren, denn die Verfahren zur Addition und Multiplikation von Dezimalzahlen mit endlich vielen Ziffern kann man nicht – ohne Grenzwerte zu bemühen – auf unendliche Ziffernfolgen ausdehnen.
Ein gangbarer Weg besteht darin, Folgen zu definieren, die immer bessere **Approximationen** der gewünschten irrationalen Zahl liefern. Das folgende Verfahren hat schon Heron vor 2000 Jahren benutzt:

Beispiel 1: Wenn wir für ein $c > 0$ an $\sqrt{c}$ (meistens irrational) interessiert sind, suchen wir als erstes Zahlen $a_1 < \sqrt{c} < b_1$ und versuchen dann, schrittweise bessere Schranken für $\sqrt{c}$ zu finden. Dabei wird die Ungleichung zwischen dem geometrischen Mittel und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen $a, b > 0$ eine entscheidende Rolle spielen:

$$\text{Geometrisches Mittel}(a,b) := \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} =: \text{Arithmetisches Mittel}(a,b),$$

$$\text{Beweis:} \qquad \text{Differenz } = \frac{a+b}{2} - \sqrt{a \cdot b} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0.$$

Das liefert uns sofort eine obere Schranke und eine dazu passende untere Schranke

$$b_1 := \frac{1+c}{2} \geq \sqrt{1 \cdot c} \quad \text{und} \quad a_1 := \frac{c}{b_1} \leq \sqrt{c}\,.$$

Dies kann man nun schrittweise verbessern, die oberen Schranken b_n als arithmetische Mittel und die unteren Schranken a_n so, dass das geometrische Mittel aus a_n, b_n konstant $= \sqrt{c}$ ist:

$$b_n := \frac{b_{n-1} + a_{n-1}}{2} \le b_{n-1} \quad \text{und} \quad a_n := \frac{c}{b_n} \ge a_{n-1}.$$

In jedem Schritt ist $b_n =$ arithmetisches Mittel$(a_{n-1}, b_{n-1}) \ge$ geometrisches Mittel $= \sqrt{c}$, also

$$a_n \le \sqrt{c} \le b_n.$$

Woran sieht man, dass es sich tatsächlich um eine Verbesserung handelt?
Weil b_n in der **Mitte** zwischen a_{n-1} und b_{n-1} liegt, folgt $0 < b_n - a_n < (b_{n-1} - a_{n-1})/2$. Die Einschachtelung von $\sqrt{c}$ wird also bei jedem Schritt mindestens um den Faktor 2 besser. Oder: Die Unsicherheitsgrenzen a_n, b_n sind weniger als halb so weit von einander entfernt wie die Unsicherheitsgrenzen a_{n-1}, b_{n-1} einen Schritt vorher. Wir haben auf diese Weise nicht $\sqrt{c}$ ausgerechnet, aber wir können den Fehler so klein machen, wie wir wollen. Mit einer geeigneten Definition werden wir später sagen können:

$\sqrt{c}$ ist gemeinsamer **Grenzwert** der Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$.

Beispiel 2: Es gibt auch Situationen, in denen Ergebnisse nicht elementar berechnet werden können, aber trotzdem mit Grenzwertargumenten **explizit bestimmbar** sind. Der antike Philosoph Zenon hat seine Kollegen mit dem *Paradoxon von Achilles und der Schildkröte* (bitte im Internet nachsehen) verwirrt. Das Paradoxon entsteht, weil man die unendlich vielen Additionen einer unendlichen geometrischen Reihe nicht ausführen kann. Es wird aufgelöst, weil man mit Grenzwertargumenten dieser unendlichen Summe einen expliziten (endlichen) Wert zuweisen kann. Auch das Tangentenproblem für die Graphen rationaler Funktionen bekommt mit Grenzwertargumenten eine explizite Antwort.
Bei der geometrischen Reihe geht es um die Summe der Potenzen einer festen Zahl q, hier mit $0 < q < 1$. Es geht also um die wachsende Folge

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n.$$

Man kann a_n verstehen, wenn man mit der dritten binomischen Formel spielt:

$$(1+q) \cdot (1-q) = 1 - q^2, \ \ ((1+q) + q^2) \cdot (1-q) = 1 - q^2 + q^2 \cdot (1-q) = 1 - q^3.$$

Ebenso heben sich in dem Produkt $a_n \cdot (1-q)$ alle Terme außer 1 und $-q^{n+1}$ weg, so dass sich (nach Division durch $1-q$) die Summenformel für die **endliche** geometrische Reihe und eine einfache obere Schranke ergibt:

$$a_n := \sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q}.$$

Für die Differenz zwischen a_n und $\frac{1}{1-q}$ haben wir folgende Gleichung

$$0 < \frac{1}{1-q} - a_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}}{1-q},$$

aus der wieder mit der Definition für Grenzwerte folgen wird, dass wir sagen können:

Die Folge $\{a_n\}$ hat den Grenzwert $1/(1-q)$.

Beim Tangentenproblem für die Graphen rationaler Funktionen geht es um die Folge $\{m_n\}$ der Sehnensteigungen über immer kürzeren Intervallen, z.B. für die Funktion $f(x) = x^3$:

$$m_n := \frac{f(a+1/n) - f(a)}{1/n} = n \cdot \big((a+1/n)^3 - a^3\big) = 3a^2 + \frac{3a}{n} + \frac{1}{n^2}$$

Auch hier wird aus der Grenzwertdefinition folgen:

Die Sehnensteigungen m_n haben den Grenzwert $3a^2$.

Beispiel 3: Im Laufe des 19. Jahrhunderts haben die Mathematiker herausgefunden, dass die Grenzwertdefinition so gemacht werden sollte, dass der folgende Satz gilt:

Jede monotone beschränkte Folge besitzt einen Grenzwert, gegen den sie konvergiert.

Dieser Satz ist das einfachste und am meisten zitierte Konvergenzkriterium.
Während die ersten Beispiele (und viele andere) den Eindruck hervorrufen können, dass der Unterschied zwischen Folgenglied und Grenzwert immer mit dem Folgenindex kontrolliert werden kann, erzwingt Beispiel 3 die kompliziertere endgültige Definition.

3. Die Grenzwertdefinition für Folgen.

Die Griechen kannten als Zahlen nur die rationalen Zahlen, aber sie wußten, dass es irrationale Längenverhältnisse (Quadratseite : Diagonale, goldener Schnitt) gibt. Ihre Proportionenlehre für Größen (Längen, Flächen, Gewichte ...) erlaubte ihnen, Gleichheit zwischen *irrationalen* Verhältnissen zu begründen und sogar irrationale Verhältnisse in Ungleichungen auftreten zu lassen. Ein wesentliches Element dieser Theorie war das
Axiom von Eudoxos:

Sind eine kleine Größe und eine große Größe gegeben, so gibt es eine natürliche Zahl n, so dass n mal die kleine Größe die große übertrifft.

Daraus wurde folgendes **Axiom für die reellen Zahlen:**

Sind eine kleine reelle Zahl r und eine große reelle Zahl R gegeben, so gibt es eine natürliche Zahl n, so dass $r \cdot n > R$ ist.

Oder einfacher:

Zu jeder reellen Zahl R gibt es eine natürliche Zahl n, die größer ist, $n > R$.

Oder gleichwertig:

Zu jeder reellen Zahl $r > 0$ gibt es einen kleineren Stammbruch $1/n < r$.

Um die Rolle dieses Axioms richtig einschätzen zu können ist folgendes Hintergrundwissen hilfreich: Es gibt Rechensysteme, "nicht archimedisch angeordnete Körper", in denen existieren unendlich große Elemente – die also größer als alle natürlichen Zahlen n sind – und unendlich kleine Elemente – die kleiner als alle Stammbrüche $1/n$ sind. Das Axiom sagt, dass die reellen Zahlen harmloser sind, dass es

keine unendlich großen oder kleinen **reellen** Zahlen gibt.

Auf Grund dieses Axioms können wir also sagen:

Weil es zwischen 0 und allen Stammbrüchen $1/n$ keine weitere reelle Zahl gibt, ist die Folge $a_n := 1/n$ ein Paradebeispiel für eine konvergente Folge; sie hat den Grenzwert 0.

Eine außerordentlich oft – auch schon von Archimedes – benutzte Anwendung dieses Axioms ist:

Um $a \le b$ zu beweisen, genügt es zu zeigen: $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a - b \le 1/n$.

Beweis: Weil es **keine** reelle Zahl r mit $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 0 < r \le 1/n$ gibt, ist die reelle Zahl $b - a$ nicht > 0, sodass gilt $a - b \le 0$.

Damit sind wir schon nahe an der endgültigen Definition von Konvergenz und Grenzwert. Wir müssen nur noch eine Hürde überwinden, die durch den Wunsch nach der Gültigkeit des Satzes über monotone beschränkte Folgen verursacht wird. Nämlich, eine monoton wachsende beschränkte Folge kann beliebig "verlangsamt" werden, indem die Folgenglieder immer öfter wiederholt werden: $a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3, \ldots$. Bei einer solchen Verlangsamung kann es passieren, dass eine vorgeschriebene maximale Abweichung $1/k$ vom Grenzwert r erst für extrem große (nicht *explizit* angebbare) Folgenindizes erreicht wird. Das soll aber in der Definition keine Rolle spielen, es soll nur darauf ankommen, dass von irgendeinem Folgenindex n_k an die vorgeschriebene Abweichung $\le 1/k$ vom Grenzwert nicht mehr verletzt wird.

Deshalb lautet die **endgültige Definition**:

Eine Folge a_n konvergiert gegen den Grenzwert r, wenn es zu **jeder** *gegebenen Fehlerschranke $1/k$ einen Garantieindex n_k gibt, sodass für alle Folgenindexe n gilt: $n \ge n_k \Rightarrow |a_n - r| \le 1/k$.*

Die beiden ersten Beispiele können mit folgendem einfacheren Spezialfall behandelt werden, in dem die Fehlergröße **explizit** durch den Folgenindex kontrolliert wird, nämlich mit einer von n unabhängigen Konstanten, durch: $\le const/n$, also wenn bewiesen werden kann:

$$\textit{Für alle } n \in \mathbb{N} \textit{ gilt: } |a_n - r| \le \tfrac{const}{n}.$$

(Die Fehlerkonstante $1/k$ ist dann garantiert, wenn in der Definition gewählt wird:
$n_k \ge const \cdot k$.)

Es kann auch bei der allgemeinen Formulierung bequemer sein, eine zusätzliche Konstante einfließen zu lassen, also statt der Fehlerschranke $1/k$ zu benutzen: $\le const/k$. – Da die reellen Zahlen erst mit Hilfe von Grenzwerten definiert werden, verwende ich in dieser den reellen Zahlen *vorhergehenden* Definition keine *reellen* Fehlerschranken $\le \epsilon$.

Die Sehnensteigungen m_n in Beispiel 2 konvergieren gegen $3a^2$, da wir die Abschätzung

$$|m_n - 3a^2| \le (3|a| + 1) \cdot \tfrac{1}{n} \quad \text{haben.}$$

Um mit der Grenzwertdefinition die Behandlung der geometrischen Reihe (Beispiel 2) zu beenden, benötigen wir noch einen Vergleich zwischen den Potenzen q^n und den Stammbrüchen $1/n$. Wir zeigen $q^n \le \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{n}$ – Interpretation: $\{q^n\}$ konvergiert gegen 0.

Beachte dazu $1 \le k \le n \;\Rightarrow\; q^n \le q^k \le q$:

$$n \cdot q^n \le \sum_{k=1}^{n} q^k = q \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \le \frac{q}{1-q}, \quad \text{damit } q^n \le \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\text{also: } |a_n - \frac{1}{1-q}| = \frac{q^{n+1}}{1-q} \le \frac{const}{n}.$$

4. Was kann man mit der Definition anfangen, wenn man den Grenzwert r nicht kennt?

Damit der bisherige Erfolg – nämlich mit berechenbaren, nicht irrationalen Grenzwerten umgehen zu können – nicht als zu klein erscheint, sei zunächst betont: Es gibt im Bereich der Schulmathematik *viele* Situationen, in denen Grenzwerte wie in Beispiel 2 **ausgerechnet** werden können, etwa Ableitungen von Polynomen oder die Fläche unter deren Graphen. Diese Fälle können also schon behandelt werden.
Aber Beispiel 1 zeigt: Falls wir $\sqrt{c}$ nicht kennen, hilft die Grenzwertdefinition nicht weiter. Das liegt daran, dass wir eine mit den Grenzwerten verbundene wesentliche Eigenschaft der reellen Zahlen noch nicht zu Hilfe geholt haben, die sogenannte **Vollständigkeit von** $\mathbb{R}$. Die Vollständigkeit kann auf verschiedene Weise definiert werden. Das ist in der Regel mit der Definition weiterer Begriffe verbunden (Cauchy-Folge, Intervallschachtelung, Supremum). Umgangssprachlich besagt die Vollständigkeit: *Es gibt genügend viele reelle Zahlen, um wie in Beispiel 1 irrationale Zahlen zu definieren.* Um das zu erklären, brauchen wir keine neuen Begriffe, weil wir für die auf der Schule interessanten Irrationalzahlen sehr oft obere und untere Approximationen wie in Beispiel 1 finden können. Die Vollständigkeit hat dann eine sehr intuitive Formulierung.

Formulierung der Vollständigkeit.

Gegeben sei eine monoton wachsende Folge $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – die wir uns als *untere* Approximationen der zu definierenden Zahl r vorstellen – und eine monoton fallende Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – die wir uns als *obere* Approximationen von r vorstellen, also:

$$\text{Für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ gilt} \quad a_m \leq a_{m+1} \leq \ldots \leq r \leq \ldots \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Vielleicht hilft es der anschaulichen Vorstellung, wenn diese zwei Folgen zusammengefasst werden als *in einander geschachtelte Intervalle*, die r enthalten:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt:} \quad r \in [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n].$$

Zusätzlich soll zwischen die beiden Folgen **höchstens eine** reelle Zahl passen, also mit Eudoxos formuliert:

> Zu jeder Fehlerschranke $1/k$ gibt es einen Garantieindex n_k, so dass für alle $n \geq n_k$ gilt $0 \leq b_n - a_n \leq 1/k$.
> Anders formuliert: $\{b_n - a_n\}$ konvergiert gegen 0 oder *ist eine Nullfolge.*
> Mit dieser Zusatzeigenschaft heißt $\{[a_n, b_n]\}$ **Intervallschachtelung**.

Dann besagt die Vollständigkeit:

Es gibt wirklich eine reelle Zahl r, die zwischen den beiden Folgen liegt!

Kompakte Schlussformulierung. Die Vollstänigkeit von $\mathbb{R}$ besagt:

> Jede Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n]\}$ definiert genau ein $r \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $r \in [a_n, b_n]$.

5. Beispiele zur Anwendung der Vollständigkeit.

Die Besprechung des Newton Verfahrens unterstützt das Verständnis der Differentialrechnung.

Gerade wegen des verbreiteten Einsatzes der Taschenrechner, plädiere ich sehr dafür, neue (irrationale) Zahlen mit monotonen oberen **und** unteren Approximationen zu konstruieren. Man muss dann zwar sowohl für die Monotonie wie für die Anwendung des Eudoxos Axioms vorher argumentieren, dafür kann man dann hinterher kontrollieren, ob die TR-Werte noch plausibel sind oder ob man z.B. an Stellenverlust, also Rundungsfehlern, gescheitert ist.

Natürlich erfordert jede numerische Annäherung an eine *neue* Irrationalzahl, dass man in der Lage ist, die benötigten Approximationen zu erfinden. Es folgen Vorschläge dazu.

Da die Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ auf der Schule nur für rationale x definiert wird und zwar für Brüche $x = m/n$ als (meist irrationale) n-te Wurzel aus 2^m, zeige ich zuerst die numerische Berechnung solcher Wurzeln. (Für ein Verfahren, das statt Differentialrechnung nur die 3. Binomische Formel und Prozentrechnung benutzt, siehe S. 7-9 von Text Z2.)

Beispiel 4: Umkehrfunktionen, speziell von $f(x) = x^n$ mit $1 \le x$.
Es handelt sich um folgende Situation: Gegeben ist eine streng monoton wachsende Funktion f und zu einem Wert W soll ein reelles Urbild r gefunden werden, $W = f(r)$. Um bei der Beschreibung Fallunterscheidungen zu vermeiden, setzen wir zusätzlich voraus, dass $f'' > 0$ und damit auch f' wachsend ist. Die Graphen solcher Funktionen liegen oberhalb ihrer Tangenten und unterhalb ihrer Sehnen (zwischen deren Endpunkten) – (Text A1).
Üblicher Weise wird r mit dem **Newton Verfahren** approximativ berechnet. Dies Verfahren beruht darauf, dass die Ableitung sehr gut zwischen *Differenzen von Werten* von f und *Differenzen von Argumenten* von f vermittelt.
Der Monotoniesatz liefert sogar eine Fehlerkontrolle mit Hilfe einer Schranke $|f''| \le B$, die wir aber hier nicht verwenden.

$$\boxed{f(y) - f(x) \approx f'(\xi) \cdot (y - x), \text{ genauer: } \big|(f(y) - f(x)) - f'(\xi) \cdot (y - x)\big| \le \tfrac{1}{2}B|y - x|^2.}$$

Hier kann ξ **irgendeine** Stelle zwischen x und y sein !!

Das Newton Verfahren beginnt nun mit einer Stelle c, so dass der Wert $C = f(c)$ in der Nähe des gewünschten Wertes W liegt. Da das Urbild r unbekannt ist, wählt man im standard Newton Verfahren $\xi = c$ (was sonst?). Die zitierte Approximation lautet dann

$$W - C \approx f'(c) \cdot (r - c) \qquad \text{(oder: } W \approx f'(c) \cdot (r - c) + f(c) = \text{Tangente}(c)\text{)}$$

und ergibt den **Newton Schritt** zur verbesserten Approximation b :

$$\boxed{r \approx b := (W - C)/f'(c) + c.}$$

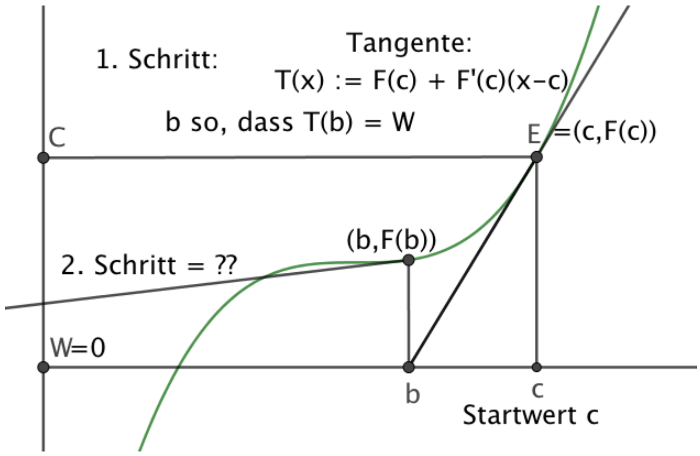
Beschreibung mit Worten:

Die nächste Näherung ist die Stelle b, an der die **Tangente** in c den Wert W erreicht.
Das folgende Bild zeigt, dass das nicht immer eine Verbesserung ergibt:

Schwäche des Newton Verfahrens

In günstigen Fällen, wie $f(x) = \exp(x)$, konvergiert das Newton Verfahren so schnell, dass man leicht seine Schwächen übersehen kann. Wenn man die Funktion f nicht gut kennt, kann an einer Näherungsstelle die Ableitung so klein sein, dass die nächste "Näherung" weit entfernt liegt, eventuell sogar außerhalb des Definitionsbereichs von f.

Die Zusatzvoraussetzung $f'' > 0$ erreicht, dass man eine monoton fallende Folge von immer besseren Näherungen berechnet. Ob für den Startwert c gilt $c < r$ oder $c > r$, die erste Näherung b_1 ist immer $> r$, weil der Graph von f oberhalb jeder Tangente liegt.



Für die zweite Näherung b_2 gilt dann $r < b_2 < b_1$ usw. $r < b_{k+1} < b_k$.

Auf der Schule ist die n-te Wurzel, also $f(x) = x^n, 2 \leq n \in \mathbb{N},\ f(r) = W,\ r = W^{1/n}$, eine der wichtigsten Umkehrfunktionen. Die Zusatzvoraussetzung $f'' > 0$ ist erfüllt. Ferner genügt es, sich auf den Bereich $W > 1$ zu beschränken. Außerdem können wir in diesem Fall aus zu kleinen Approximationen zu große ausrechnen und umgekehrt und daher das Newton Verfahren *mit einer Fehlerabschätzung* ausführen.

$$c > W^{1/n} \Rightarrow W/c^{n-1} < W^{1/n}, \quad c < W^{1/n} \Rightarrow W/c^{n-1} > W^{1/n}.$$

Weil $f'' > 0$ gilt, ist f' wachsend. Daher haben wir, obwohl $W^{1/n}$ noch unbekannt ist, **zu kleine und zu große** Steigungen:

$$c < W^{1/n} \Rightarrow f'(c) < f'(W^{1/n}) < f'(W/c^{n-1}) \text{ und}$$
$$c > W^{1/n} \Rightarrow f'(c) > f'(W^{1/n}) > f'(W/c^{n-1}).$$

Wegen dieser Zusatzinformation können wir den Newton Schritt statt mit $\xi = c$ auch mit $\xi = W/c^{n-1}$ durchführen und so auch eine **untere** Schranke a erhalten:

$$\boxed{r \approx a := \max(1, (W - C)/f'(W/c^{n-1}) + c).}$$

Bemerkung. Falls c sehr viel größer als $W^{1/n}$ ist, kann die berechnete untere Schranke sogar negativ werden. Wegen $W > 1$ sind wir nicht an unteren Schranken $a < 1$ interessiert. Daher steht $\max(1, \ldots)$ in der Definition von a.

Wegen der Potenz c^{n-1} im Nenner ist W/c^{n-1} eine schlechtere Approximation von $W^{1/n}$ als c und um so mehr so, je größer n. Aus den unteren und oberen Schranken a, b soll durch Mitteln ein neuer Startwert c gewonnen werden, wobei der bessere Wert b stärker berücksichtigt wird. In dem folgenden Beispiel $n = 5$ war $c = (a + 2b)/3$ besser als $c = (a+b)/2$. Bei weiterer Wiederholung bekommen wir genau wie im einseitigen standard Newton Verfahren monotone Approximationen, aber eben von oben und unten:

$$W^{1/n} \in [a_{k+1},\, b_{k+1}] \subseteq [a_k,\, b_k]$$

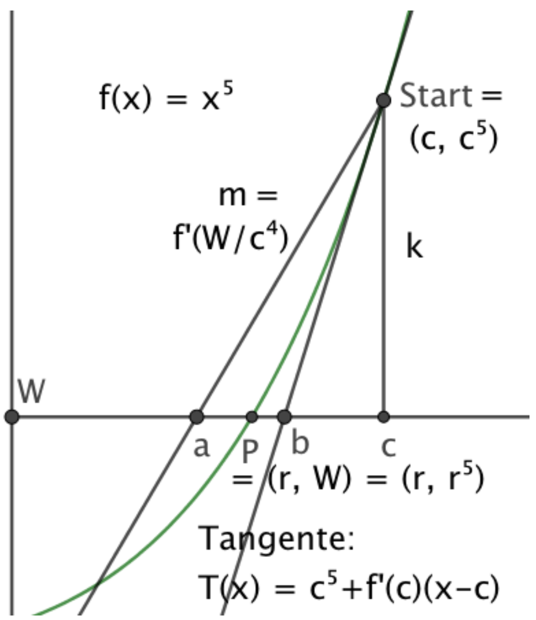
Da die Eudoxos Eigenschaft – oder $\{b_k - a_k\}$ ist Nullfolge – allein aus der Verwendung der Mittelwerte $c = (a_k + 2b_k)/3$ folgen wird, kann ich auf einen Beweis der Monotonie verzichten und dafür nach den beiden Newton-Definitionen von a_{k+1}, b_{k+1} (berechnet aus dem Mittelwert c) hinzufügen:

$$a_{k+1} := \max(a_k, a_{k+1}),\ \ b_{k+1} := \min(b_k, b_{k+1}).$$

Da wir in allen Newton Schritten nur positive Ableitungen verwenden (und $W > 1$), gilt: Falls $C = c^n > W$ ist, liegen die nächsten Werte a_{k+1}, b_{k+1} in dem linken Teil $[a_k, c]$ von $[a_k, b_k]$ und falls $C = c^n < W$ ist, liegen die nächsten Werte in dem rechten Teil $[c, b_k]$, also $b_{k+1} - a_{k+1} < (2/3) \cdot (b_k - a_k)$. Wir sehen also ohne Anstrengung, dass der Abstand der Unsicherheitsgrenzen bei jedem Schritt mindestens um den Faktor $2/3$ sinkt – daher ist die Eudoxos Voraussetzung erfüllt und das Vollständigkeitsaxiom liefert den reellen Grenzwert $W^{1/n} = \lim a_k = \lim b_k$. – Allerdings wird diese $2/3$-Abschätzung der großen Konvergenzgeschwindigkeit dieses zweiseitigen Newton Verfahrens nicht gerecht. Eine bessere Fehlerabschätzung führt hier zu weit.

Newtonverfahren für $f(x) = x^5$

Gegeben W, gesucht r mit $r^5 = W$.
Die oberen Schranken b werden mit Hilfe der Tangente in Startpunkten (c, c^5) berechnet.
Die unteren Schranken a werden mit Hilfe der Steigung $m = f'(W/c^4)$ berechnet.
Nächster Startwert ist $c = (a + 2b)/3$.



Beispielrechnung für $f(x) = x^5$ mit $W = 10$ und Startwert $c = 1$. (Nur 6 Iterationen!)

```
»[r,R] = NewtonZweiseitig(10,1); answer=[r,R]

ab =

              1.00018                  2.8
     1.00090032405833            172.10368


ab =

              1.00018     1.84541536873579
     1.00090032405833     21.4028035680727


ab =

     1.58032344632134     1.58547716252757
     9.85666321241857     10.0184365914146


ab =

     1.58487867827013     1.58489481736752
     9.99954211661659     10.0000512624368


ab =

       1.584893192301      1.5848931924789
     9.99999999494867     10.0000000005613


ab =

     1.58489319246111     1.58489319246111
                   10                   10


answer =

     1.58489319246111                   10
```

In mehreren Schulbüchern steht folgende Rechnung am Anfang der

Differentialrechnung der Exponentialfunktionen:

$$\frac{2^{x+h}-2^x}{h} = 2^x \cdot \frac{2^h-1}{h}.$$

Diese Rechnung bedeutet zunächst, dass die rechtsseitigen Sehnensteigungen über Intervallen der Länge h wie 2^x wachsen. Weiter zeigt diese Rechnung: Wenn man die Ableitung bei $x=0$ berechnen kann, dann kennt man alle Ableitungen. In Formeln: Für $f(x) := 2^x$ gilt dann $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$. Ein Wermutstropfen ist, dass 2^x nur für rationale x definiert und $2^{x+h} = 2^x \cdot 2^h$ nur bruchstückweise bewiesen wurde.
Für eine vollständige Definition der Potenzen $a^x,\ x \in \mathbb{R}$ siehe Text A2, S. 7-9.

Beispiel 5: Berechnung der Ableitung von $f(x) = 2^x$ bei $x = 0$ mit konvergenten Folgen.

Wir wählen also $h = 1/n$ und berechnen die monotonen (Beweis nach der Behauptung) Folgen der rechtsseitigen **und** der linksseitigen Sehnensteigungen:

$$\text{rechtsseitig:}\ \ b_n := \frac{2^{1/n}-1}{1/n} \geq b_{n+1}, \quad \text{linksseitig:}\ \ a_n := \frac{1-2^{-1/n}}{1/n} \leq a_{n+1}.$$

Als gute Schätzung für $f'(0)$ nehmen wir den Mittelwert: $f'(0) \approx (a_n + b_n)/2$.

Wenn man schon TRs benutzt, dieser Mittelwert ist erstaunlich gut.

Die **Monotonie** der Folgen $\{a_n\}, \{b_n\}$ folgt aus $f'' > 0$ wie immer mit dem Monotoniesatz - außer dass wir noch vor der Differentialrechnung der Exponentialfunktionen sind. Auch der vom TR angezeigte Graph von $f(x) = 2^x$ macht die Monotonie anschaulich klar. Beweise ohne Analysis (also ohne Monotoniesatz!) sind mühsamer und unattraktiv für die Schule:

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= n \cdot (2^{1/n} - 2^{1/(n+1)}) - (2^{1/(n+1)} - 1) \\ &= n \cdot 2^{1/(n+1)}(2^{1/(n(n+1))} - 1) - (2^{1/(n+1)} - 1). \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $y := 2^{1/(n(n+1))} > 1$ und der Summenformel für die geometrische Reihe wird daraus:

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= n \cdot y^n(y-1) - (y^n - 1) \\ &= (y-1) \cdot \big(n \cdot y^n - (y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + y^0)\big) > 0. \end{aligned}$$

Die für die Existenz wichtige Eudoxos Abschätzung (Nullfolgen-Eigenschaft) ist einfacher:

$$0 \leq b_n - a_n = n \cdot (2^{1/n} - 2 + 2^{-1/n}) = n \cdot 2^{-1/n}(2^{1/n} - 1)^2 \leq 1/n,$$

denn wegen der Bernoullischen Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ ist $(1+1/n)^n \geq 2$, also $2^{1/n} \leq 1 + 1/n$ (und natürlich $2^{-1/n} < 1$).
Das Vollständigkeitsaxiom sagt uns jetzt, dass die (an rationalen Stellen genommenen) rechtsseitigen und linksseitigen Sehnensteigungen einen gemeinsamen reellen Grenzwert $f'(0) = \lim b_n = \lim a_n$ haben. Das liefert $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$.

Und die (Proportional-)Kettenregel liefert für die Funktion $g(x) := f(x/f'(0)) = 2^{x/f'(0)}$ die Ableitungseigenschaft $g'(x) = 1 \cdot g(x),\ g(0) = 1$, also die Eigenschaft, die die **natürliche Exponentialfunktion** definiert.

Beispiel 6: Numerische Approximationen der Exponentialfunktion für $0 \leq x$.

Es ist zur Zeit nicht üblich, irgendetwas Genaueres über die numerische Berechnung von Werten der Exponentialfunktion zu sagen. Das ist schade, da die Mittel dafür durchaus zur Verfügung stehen. Ich erinnere an eine *multiplikative Form des Monotoniesatzes* für positive Funktionen f, g:

$$\frac{f'}{f} \leq \frac{g'}{g} \Rightarrow \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f}{g} \cdot \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) \leq 0, \quad \text{daher ist } \frac{f}{g} \text{ eine schwach fallende Funktion.}$$

Anwendung allgemein:

a) Für positive Funktionen h mit $h'/h \leq 1,\ h(0) = 1$ gilt $0 \leq x \Rightarrow h(x) \leq \exp(x)$.

b) Für positive Funktionen H mit $H'/H \geq 1, H(0) = 1$ gilt $0 \leq x \Rightarrow \exp(x) \leq H(x)$.

Anwendungsbeispiele:

Für die Funktionen $h_n(x) := (1 + x/n)^n$ gilt $h_n'(x)/h_n(x) = 1/(1 + x/n) \leq 1$.

Für die Funktionen $H_n(x) := (1 - x/n)^{-n}$ gilt $H_n'(x)/H_n(x) = 1/(1 - x/n) \geq 1$ in $[0, n)$.

Daher liefert der multiplikative Monotoniesatz (mit $x < n$ wo nötig):

$$\boxed{h_n(x) \leq h_{n+1}(x) \leq \ldots \exp(x) \leq \ldots H_{n+1}(x) \leq H_n(x)}$$

Auch hier ist die Eudoxos Voraussetzung nicht schwierig. Wir setzen im Nenner die Bernoullische Ungleichung ein, $(1 - x^2/n^2)^n \geq 1 - x^2/n$, und wählen n genügend groß, $n \geq 2x^2$, um Nullstellen im Nenner zu vermeiden. Dann ist $\{H_n(x) - h_n(x)\}$ eine Nullfoge:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{(1 - x/n)^n} - (1 + x/n)^n &= (1 + x/n)^n \left(\frac{1}{(1 - x^2/n^2)^n} - 1\right) \\ &\leq \exp(x)\left(\frac{1}{1 - x^2/n} - 1\right) \leq 2x^2 \exp(x) \cdot \frac{1}{n} = \frac{const}{n}. \end{aligned}$$

Bemerkungen. 1.) Die Tangente bei 0 ist $t(x) = 1 + x$ und $h_n(x) = t(x/n)^n$ wird nahe gelegt durch $\exp(x/n)^n = \exp(x)$. Die Definition von $H_n(x) = 1/h_n(-x)$ wird nahe gelegt durch $\exp(x) = 1/\exp(-x)$.

2.) Die Ungleichung

$$|x| < 1 \;\Rightarrow\; 1 + x < \exp(x) < (1 - x)^{-1}$$

zeigt, dass der Graph von exp zwischen Graph und Tangente bei $x = 0$ der rationalen (Ober-)Funktion $f(x) = (1 - x)^{-1}$ liegt. Das zeigt $\exp'(0) = 1$ – noch bevor eine Differentiationsregel für Grenzfunktionen besprochen wurde.

3.) Statt mit der Tangente kann man aus besseren Polynomapproximationen schneller konvergierende Folgen machen, zum Beispiel:

$$\begin{gathered} k(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 \geq k'(x), \quad K(x) = 1/k(-x) \leq K'(x), (|x| \leq 1.5) \\ k_n(x) := k(x/n)^n \;\leq\; \exp(x) \;\leq\; K(x/n)^n =: K_n(x), \quad (|x| \leq 1.5n). \end{gathered}$$

Es ist recht verblüffend, wie gute Approximationen mit so einfachen Tricks entstehen.

4.) Schließlich folgt $\exp(a + x) = \exp(a) \cdot \exp(x)$ aus $h_n(a + x) \leq h_n(a) \cdot h_n(x)$ und $H_n(a + x) \geq H_n(a) \cdot H_n(x)$. Der multiplikative Monotoniesatz. zeigt beide Ungleichungen.

Beispiel 7: Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, natürlicher Logarithmus.

Nachdem Rechenverfahren für die Exponentialfunktion vorgeführt wurden, bietet sich deren Umkehrfunktion, der natürliche Logarithmus, als nächstes Beispiel an. Die Exponentialfunktion erfüllt ebenfalls die in Beispiel 4 diskutierten Voraussetzungen $f' > 0,\ f'' > 0$, die eine übersichtliche Diskussion des Newton Verfahrens ermöglichen.
Zuächst geht es noch einfacher: Unsere ersten Approximationen der Exponentialfunktion können *von Hand* invertiert und differenziert werden (zuerst $0 \le x$, also $1 \le y$):

$$\exp(x) \ge (1+x/n)^n = y \;\Rightarrow\; x = L_n(y) := n \cdot (y^{1/n} - 1) \ge \ln(y),$$
$$L_n'(y) = y^{-(1-\frac{1}{n})} \ge \frac{1}{y}$$
$$\exp(x) \le \frac{1}{(1-x/n)^n} = y \;\Rightarrow\; x = l_n(y) := n \cdot (1 - y^{-1/n}) \le \ln(y),$$
$$l_n'(y) = y^{-(1+\frac{1}{n})} \le \frac{1}{y}$$

Für $f(x) := (1+x)^n$ gilt (wegen $-1 < x \Rightarrow f'' > 0$) die Bernoullische Ungleichung
$$(1+x)^n \ge 1 + nx.$$
Daraus folgt eine Abschätzung für $y^{1/n}$, wenn $1 + nx = y,\ x := (y-1)/n$ gewählt wird:

$$1 \le y^{1/n} \le 1 + \frac{y-1}{n} \quad (= \text{ Tangente von } f(y) := y^{1/n} \text{ bei } y = 1,\ f'' < 0)$$

Das gibt für die Differenz der unteren und oberen Schranken $l_n(y) \le \ln(y) \le L_n(y)$:

$$0 \le L_n(y) - l_n(y) = n y^{-1/n}(y^{2/n} - 2y^{1/n} + 1) \le n \cdot \big(y^{1/n} - 1\big)^2$$
$$\le (y-1)^2/n. \quad \text{(Nullfolge!)}$$

Für das **Newton Verfahren** für exp zur Berechnung der Umkehrfunktion wird wie in Beispiel 4 ein Urbild r von $W > 1$ gesucht, also $W = \exp(r),\ r = \ln(W)$. Eine Anfangsnäherung $0 < c,\ C = \exp(c)$ sei gewählt und

$$\boxed{r \approx b := (W-C)/f'(c) + c = (W-C)/C + c = W/C - 1 + c}$$

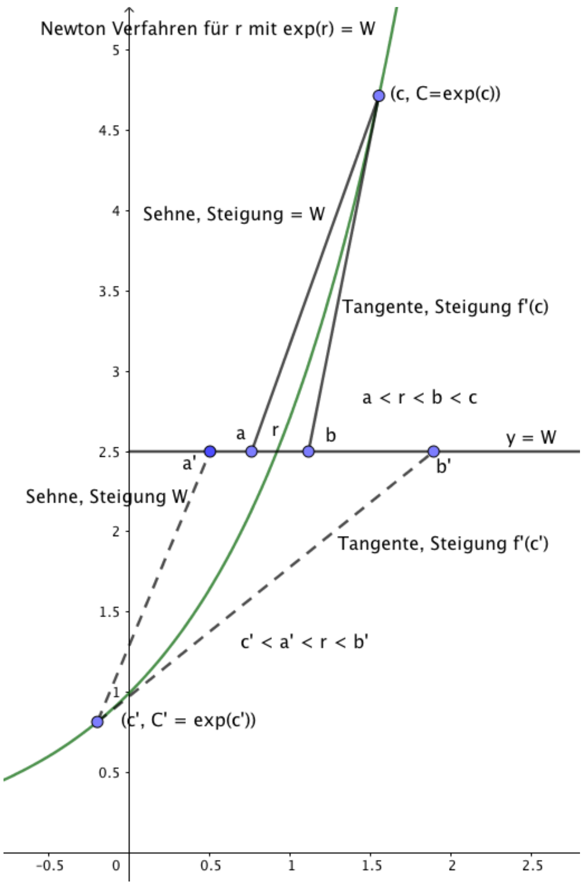
ist der standard Newton Schritt, der eine bessere Approximation b mit $r < b$ liefert. Außerdem wissen wir wegen $f' = f$ auch $f'(r) = W$, ehe wir den Wert $r = \ln(W)$ kennen !! Deshalb können wir sogar einfacher als in Beispiel 4 auch einen Newton Schritt zu einer **unteren** Approximation a von $r = \ln(W)$ machen:

$$\boxed{r \approx a := (W-C)/f'(r) + c = (W-C)/W + c = 1 - C/W + c}$$

Danach geht es mit $c = (a+b)/2$ als nächster Näherung weiter wie in Beispiel 4.
Wir zeigen eine graphische Veranschaulichung und eine 10-stellige Beispielrechnung:

Zweiseitiges Newton Verfahren für $f = \exp$.

Gegeben $W > 1$, gesucht r mit $\exp(r) = W$, also $r = \ln(W)$.
Vor Kenntnis von r ist bekannt: $f'(r) = W$.
Startpunkt entweder $(c, C = \exp(c)), C > W$ oder $(c', C' = \exp(c')),\ C' < W$.
Zu jedem Startpunkt c oder c' werden wie beschrieben neue untere und obere Schranken $a \le r \le b$ berechnet und der nächste Startpunkt ist $c := (a + b)/2$.



Beispiel $\exp(r) = 10$, Startwert $c = 1$
Msn beachte die rasche Konvergenz!

```
»[r,R] = NewtonZweiseitig(10,1); answer=[r,R]

ab =

        1.7281718171541          3.67879441171442
       5.63035118221644          39.5986256446277

ab =

       2.21031812451394          2.37320146890315
       9.11861678720582          10.7316945323459

ab =

       2.30252671033399          2.30264389851806
       9.99941619044174          10.0005880725309

ab =

       2.30258509299402          2.30258509299407
       9.99999999999978          10.0000000000002

answer =

       2.30258509299405                        10
```