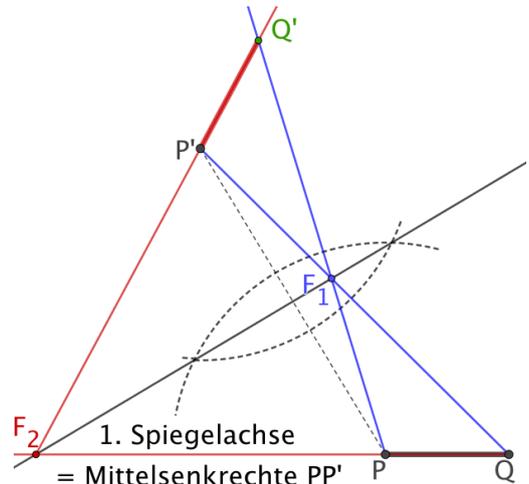


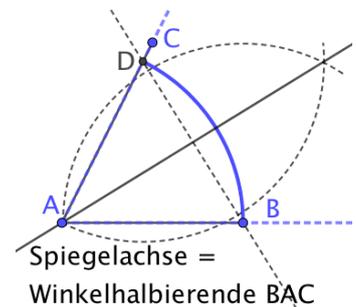
Spiegelungen und Drehungen

Das Zeichnen mit Zentimetermaß und Winkelmesser gehört auf jeden Fall auch zur Geometrie. Aber da z.B. das Verhältnis von Quadratseite zu Quadratdiagonale nicht durch Messen als $\sqrt{2}$ bestimmt werden kann, soll gelernt werden, unvollkommene Zeichnungen exakt zu interpretieren. Streckenlängen sollen nicht durch Abmessen verglichen werden, sondern die Strecken sollen mit Spiegelungen aufeinander gelegt werden. Das funktioniert übrigens in den nicht-euklidischen Geometrien in gleicher Weise. Die Unterschiede machen sich erst bei den Parallelen bemerkbar, dem nicht experimentell überprüfbar Verhalten im Unendlichen, das durch das Parallelenaxiom formuliert wird.

Das Bild zeigt wie eine gegebene Strecke PQ so gespiegelt wird, dass P in einen gewünschten anderen Punkt P' abgebildet wird: Konstruiere zunächst mit zwei Kreisen die Mittelsenkrechte zwischen P und P' . Verbinde den anderen Endpunkt Q mit P' und schneide diese Strecke mit der Spiegelachse in F_1 . Die Gerade $P'Q$ wird in die Gerade PF_1 gespiegelt - auf ihr muss der Bildpunkt Q' von Q liegen. Schneide zweitens die Gerade QP mit der Spiegelachse in F_2 . Da die Gerade F_2P in die Gerade F_2P' gespiegelt wird, finden wir Q' als Schnitt der Geraden PF_1 und F_2P' . Hiernach müssen Strecken mit gleichem Anfangspunkt verglichen werden:



Zu vergleichen sind die Strecken AB und AC . Verlängere diese Strecken zu Geraden. Der Punkt B muss an der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ gespiegelt werden. Schneide dazu den Kreis um A durch B mit der Geraden AC im Bildpunkt D . Nun können die Strecken AD und AC verglichen werden. AD ist kürzer. – Sollen weitere Punkte, z.B. ein Dreieck ABQ , abgebildet werden, so geht das wie im ersten Bild.

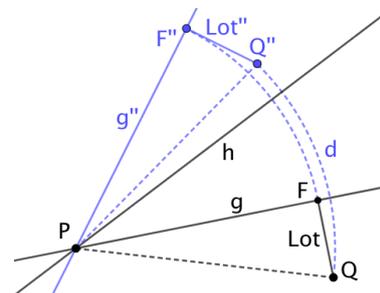


Wichtig beim Vergleichen mit Spiegelungen ist folgender:

Satz.

Die Zusammensetzung der Spiegelungen an zwei Geraden g, h , die sich in einem Punkt P schneiden, ist eine Drehung um P .

Wähle g als erste Spiegelachse und h als zweite. Der Drehwinkel ist doppelt so groß, wie der Winkel zwischen einer Halbgeraden von g und der links herum näheren Halbgeraden von h (Anfangspunkt P).



Beweis. Für jede Spiegelung gilt: Jeder Punkt M der Spiegelachse ist gleich weit von einem beliebigen Punkt Q und dessen Spiegelbild Q' entfernt. Für die Zusammensetzung der Spiegelungen an g und h folgt: Jeder beliebige Punkt Q ist ebenso weit von dem Schnittpunkt P entfernt wie sein doppelt gespiegeltes, also "gedrehtes" Bild Q'' , in Formeln

$|PQ| = |PQ''|$. Ein Punkt und sein gedrehtes Bild liegen also immer auf einem Kreis um den Drehpunkt P .

Sei nun g die erste Spiegelachse. Sie bleibt bei der ersten Spiegelung fest und nach der zweiten Spiegelung ist h Winkelhalbierende zwischen g und g'' . Die Gerade g wird also um den doppelten Winkel bewegt. (2α rechtsherum ist dasselbe wie $360^\circ - 2\alpha$ linksherum.)

Um einen beliebigen Punkt Q abzubilden, konstruiere zuerst das Lot von Q auf g mit Lotfußpunkt F . Den Punkt $F \in g$ können wir schon auf $F'' \in g''$ abbilden (mit Hilfe eines weiteren Kreises). Zu einander senkrechte Geraden werden beim Spiegeln auf zu einander senkrechte Geraden abgebildet. Daher können wir auch das Lot QF auf die Bildstrecke $Q''F''$ abbilden. Diese Abbildung ist das, was wir bei Rädern, Uhren oder gedrehtem Papier als "Drehung" kennen:

$$\text{Winkel } QPQ'' = \text{Winkel } FPF'' = \text{Winkel } (g, g'') = \text{zweimal Winkel } (g, h).$$

Ich schreibe zwar hauptsächlich über das logische Argumentieren, weil das den Schulbüchern so abhandeln gekommen ist. Aber natürlich soll man den Geometrieunterricht auch durch *selber Zeichnen* unterstützen, z.B. weil viele Argumente durch eine Skizze klarer gemacht werden können. Auch kann ich mir nicht vorstellen, dass man dreidimensionale Geometrie lernen kann, ohne der Intuition helfende zweidimensionale Zeichnungen zu benutzen.

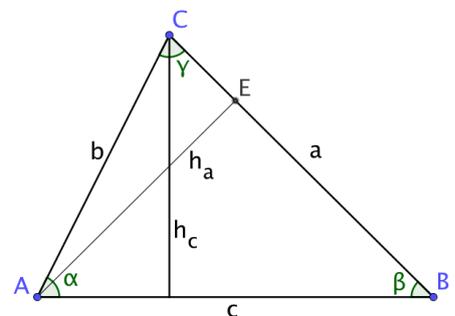
Dabei sind **Dreiecksformeln**, die Beziehungen zwischen den abmessbaren Größen eines Dreiecks formulieren, hilfreich. In den nächsten beiden Sätzen ist nur die Definition von Sinus und Kosinus mit den Dreiecksbezeichnungen kombiniert. Dann, zum Schluss, braucht man mal wieder die Winkelsumme im Dreieck, hier in der Form $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$:

Sinussatz. $a \cdot \sin \beta = h_c = b \cdot \sin \alpha$, entsprechend für die übrigen Seiten. Zusammengefasst:
 $\sin \alpha / a = \sin \beta / b = \sin \gamma / c.$

Projektionssatz. $c = b \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \beta.$

Kosinussatz. Hierfür werden $0 = a \cdot \sin \beta - b \cdot \sin \alpha$ und der Projektionssatz quadriert und addiert:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha)^2 + (a \cdot \sin \beta - b \cdot \sin \alpha)^2 \\ &= a^2(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \\ &\quad + 2ab(\cos \beta \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \sin \alpha) \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha + \beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$



Statt des Additionstheorems für $\cos(\alpha + \beta)$ kann auch der Satz des Pythagoras im Dreieck ABE verwendet werden:

$$c^2 = h_a^2 + |BE|^2 = b^2 \cdot \sin^2 \gamma + (a - b \cos \gamma)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

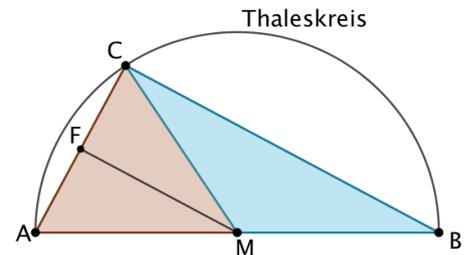
Flächeninhalt. $2F = c \cdot h_c = b \cos \alpha \cdot a \sin \beta + a \cos \beta \cdot b \sin \alpha = ab \sin \gamma = a \cdot h_a.$

Randbemerkung. In den nicht-euklidischen Geometrien gelten analoge Formeln, deren Ergebnisse bei immer kleineren Seitenlängen sich immer weniger von den Euklidischen Formeln unterscheiden. Die sphärische Geometrie war sogar Schulstoff, wurde aber abgeschafft, weil das Rechnen mit diesen Formeln vor Existenz der Taschenrechner reichlich mühsam war. Seit es Taschenrechner mit den trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen gibt, benötigt man für Dreiecksberechnungen in der Euklidischen und in der sphärischen Geometrie gleich viele Tastendrucke.

Als Nächstes soll der Thalesatz zum **Satz vom Umfangswinkel** verallgemeinert werden. Beim ersten Auftreten hatten wir den Thalesatz mit Hilfe von Symmetrien erklärt. Wir wiederholen den Satz unter Benutzung der Winkelsumme im Dreieck und des Strahlensatzes.

a) **Satz des Thales**

Gegeben ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt auf seiner längsten Seite. Dann ist die Summe der vier Basiswinkel der beiden gefärbten gleichschenkligen Dreiecke 180° , der Winkel bei C ist also 90° .



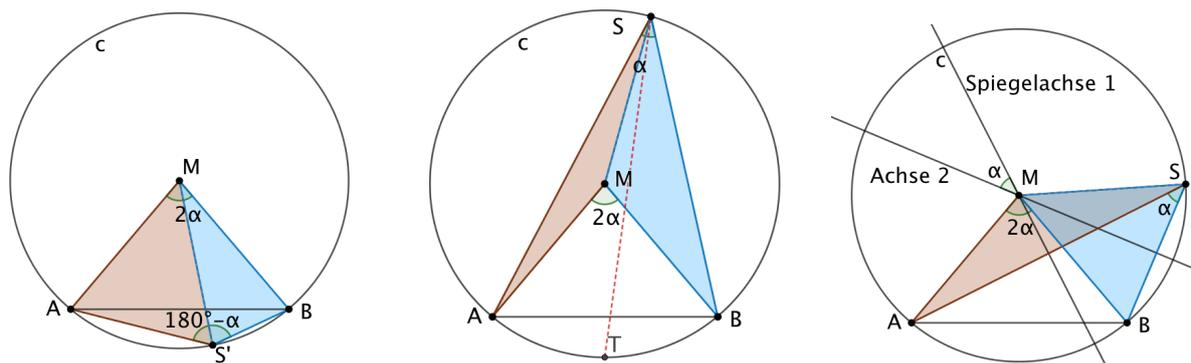
b) **Umkehrung**

Gegeben ein rechtwinkliges Dreieck ABC . Dann ist die Mittelsenkrechte FM einer Kathete **parallel** zu der anderen Kathete. Nach dem Strahlensatz trifft sie die Hypotenuse in deren Mittelpunkt. Der Umkreis hat also AB als Durchmesser und ist daher der Thaleskreis.

In den Aussagen a) und b) sind Voraussetzung und Behauptung vertauscht (*rechter Winkel bei $C \Leftrightarrow$ Ecke C auf dem Halbkreis über AB*). Dass die Aussagen a) und b) beide richtig sind, bedeutet, dass Voraussetzung und Behauptung äquivalente Aussagen sind. Man spricht von einem Satz und seinem *Umkehrsatz*. In vielen Fällen ist eine derartige Umkehrung falsch.

Randbemerkung. Das Bild zum Thaleskreis kann man auch in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie betrachten. Man bekommt die Aussage: *Die Summe der Winkel bei A und B ist gleich dem Winkel bei C .*

Umfangswinkelsatz und Umkehrung



Betrachte in dem Kreis c mit Mittelpunkt M die Sehne AB . Der Winkel AMB (Größe gleich $2|\alpha|$) heißt *Mittelpunktswinkel* zu der Sehne AB oder dem Bogen $AS'B$. Wir betrachten Dreiecke ABS , wobei S ein Kreisbogen oberhalb der Sehne ist und Dreiecke $AS'B$ mit S' auf dem Kreis, aber unterhalb der Sehne. ("oberhalb" ist die Seite, auf der M liegt)

Behauptung. $\angle ASB = \alpha$ und $\angle BS'A = 180^\circ - \alpha$.

Fall 1. Der Punkt S' liegt unterhalb der Sehne. Dann ist die Summe der vier Basiswinkel der gefärbten gleichschenkligen Dreiecke $= 360^\circ - 2\alpha$. Also ist die Summe der Basiswinkel bei S' die Hälfte, $180^\circ - \alpha$.

Fall 2. Der Punkt S liegt oberhalb der Sehne und M im Innern des Dreiecks ABS . Dann wird die Summe der beiden Scheitelwinkel der gefärbten Dreiecke einerseits durch 2α zu 360° ergänzt, andererseits ebenso durch die Summe der vier Basiswinkel. Daher ist die Summe der beiden Basiswinkel bei S wie behauptet gleich α .

Fall 3. Der Punkt S liegt oberhalb der Sehne und M liegt *nicht* im Innern des Dreiecks ABS . Ich gebe einen Beweis, der ohne die Fallunterscheidung in die Fälle 2 und 3 auskommt. Die Mittelsenkrechten der Sehnen AS und BS gehen durch M , so dass Spiegelung an diesen Geraden den Kreis auf sich abbildet. Da die Mittelsenkrechten *senkrecht* auf den Sehnen AS und BS stehen, schneiden sie sich unter **demselben Winkel** (Beh: $= \alpha$) wie die Sehnen. Spiegelung an der Senkrechten auf AS gefolgt von der Spiegelung an der Senkrechten auf BS bildet zunächst A auf S ab und dann diesen Punkt auf B . Die beiden Spiegelungen ergeben also eine Drehung um den Mittelpunktswinkel 2α . Der Winkel zwischen den Spiegelachsen ist also der halbe Mittelpunktswinkel.

Wie beim Thalesatz gibt es auch einen **Umkehrsatz**. Dazu wird die Sehne AB zu einer Geraden g verlängert und die "obere" Seite von g ist die, in der M liegt. Punkte Q liegen oberhalb von g , Punkte Q' liegen unterhalb. Dann sagt der Umkehrsatz:

Nur dann, wenn Q auf dem oberen Kreisbogen liegt, gilt $\angle AQB = \alpha$,

Nur dann, wenn Q' auf dem unteren Kreisbogen liegt, gilt $\angle BQ'A = 180^\circ - \alpha$.

Zum **Beweis** verbinden wir Q bzw. Q' mit dem Mittelpunkt der Sehne AB und nennen den Schnitt mit dem Kreis S bzw. S' . Für Q (bzw. Q') *außerhalb* des Kreises ist das Dreieck ASB (bzw. $AS'B$) *innerhalb* des Dreiecks AQB (bzw. $AQ'B$) - und umgekehrt, falls Q (bzw. Q') *innerhalb* des Kreises liegt. Folgender **Hilfssatz** beendet den Beweis:

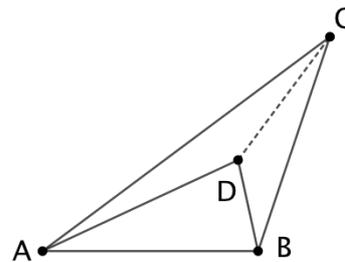
Voraussetzung:

Das Dreieck ABD liege innerhalb des Dreiecks ABC .

Behauptung:

Der Winkel $\angle ADB$ ist gleich der Summe der vier Winkel $\angle DAC, \angle ACD, \angle DCB, \angle CBD$, denn $\angle ADC + \angle CDB$ ergänzt beide zu 360° . Daraus folgt: $\angle ADB > \angle ACB$.

In Worten: Der innere Winkel (bei D) ist größer als der äußere (bei C).



Beispiel 1.

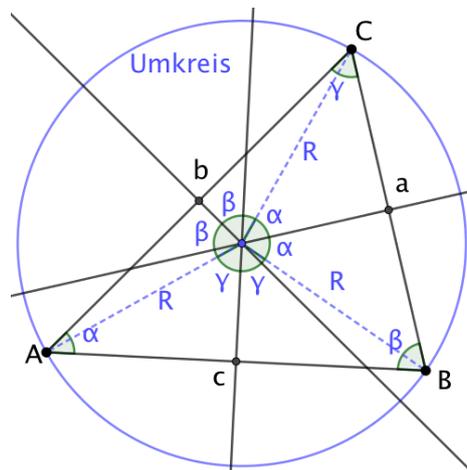
Zeichnet man in ein Dreieck mit den sich schneidenden Mittelsenkrechten noch zusätzlich die Radien des Umkreises zu den Ecken, so erhält man ein Bild, das den Umfangswinkelsatz dreimal zeigt. Die Mittelpunktswinkel $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ liefern einen Beweis des Sinussatzes:

$$\frac{1}{2R} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

der von dem Standardbeweis $a \cdot \sin \beta = h_c = b \cdot \sin \alpha$ verschieden ist.

Nicht zum Auswendiglernen, aber als Übung zum Ablesen von Beziehungen aus einer Figur findet man zu der üblichen Flächeninhaltsformel $2F = ab \sin \gamma$ weitere:

$$2F = abc/2R = R^2 \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$



Beispiel 2.

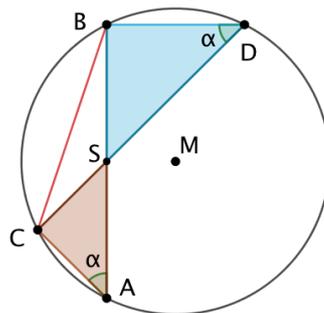
Unabhängig von der Lage des Punktes S im Umfangswinkelsatz **halbieren** die **Winkelhalbierenden** des Umfangswinkels $\angle ASB$ den Kreisbogen von A nach B unterhalb der Sehne AB . Diese Winkelhalbierenden gehen also unabhängig von S alle durch den Mittelpunkt T dieses Kreisbogens. (Mittleres der drei Bilder zum Umfangswinkelsatz)

Beispiel 3. Sehnenprodukte am Kreis

Gegeben zwei Kreissehnen AB und CD , die sich in S schneiden. Dann gilt:

$$|CS| \cdot |DS| = |AS| \cdot |BS|.$$

Wegen des Umfangswinkelsatzes ist $\angle CAS = \angle BDS$, denn beide sind Umfangswinkel über der Sehne CB . Da auch die Scheitelwinkel bei S gleich sind, sind die Dreiecke CAS und BDS ähnlich, also $|CS| : |AS| = |BS| : |DS|$. Das ist äquivalent zu der Produktbehauptung.



Beispiel 4. Beitrag zum isoperimetrischen Problem

Eine im Lauf der Jahrhunderte oft diskutierte Frage ist: *Hat der Kreis bei gegebenem Umfang maximalen Flächeninhalt?* (Das ist das sogenannte "isoperimetrische Problem".) Der folgende Satz über Vierecke ist die Grundlage des "Steinerschen Viereckverfahrens", das zu einem Beweis dieser Maximaleigenschaft des Kreises führt.

Gelenkvierecke

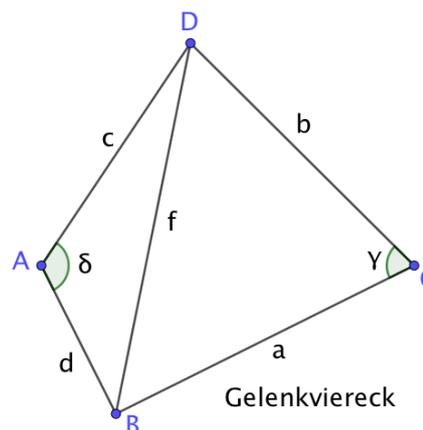
Ein konvexes **Gelenkviereck** $ABCD$ hat Seiten a, b, c, d **fester** Länge. Es ist also durch einen weiteren Winkel, z.B. $\gamma < \pi$, bestimmt.

Satz (maximaler Flächeninhalt).

Ein Gelenkviereck hat maximalen Flächeninhalt, wenn die Summe gegenüber liegender Innenwinkel 180° beträgt, z.B. $\gamma + \delta = 180^\circ$.

Solche Vierecke sind wegen des Satzes vom Umfangswinkel Sehnenvierecke eines Kreises.

Daraus folgt (unten): Konvexe Gelenkpolygone haben maximalen Flächeninhalt genau dann, wenn sie einem Kreis einbeschrieben sind.



$$4F^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 / 4 - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) / 2 - 2abcd \cdot \cos(\gamma + \delta)$$

Beweis.

Der Flächeninhalt wird als Summe der Flächen der Dreiecke ABD und CDB berechnet. Für die doppelte Vierecksfläche gilt also

$$2F = a \cdot b \cdot \sin \gamma + c \cdot d \cdot \sin \delta.$$

Eine Beziehung zwischen γ und δ folgt aus dem Kosinussatz, weil die Länge der Diagonale f aus jedem der beiden Teildreiecke berechnet werden kann:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta$$

Wir quadrieren $2F$ und $(a^2 + b^2)/2 - (c^2 + d^2)/2 = ab \cos \gamma - cd \cos \delta$ und addieren.

$$4F^2 + ((a^2 + b^2)/2 - (c^2 + d^2)/2)^2 = a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \cdot (\sin \gamma \sin \delta - \cos \gamma \cos \delta)$$

und daraus

$$4F^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 / 4 - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) / 2 - 2abcd \cdot \cos(\gamma + \delta).$$

Dieser Ausdruck wird maximal für $\cos(\gamma + \delta) = -1$ oder $\gamma + \delta = 180^\circ$. Das gilt dann auch für die Winkel bei B und D . Gegenwinkelsumme gleich 180° ist die charakterisierende Eigenschaft von Sehnenvierecken.

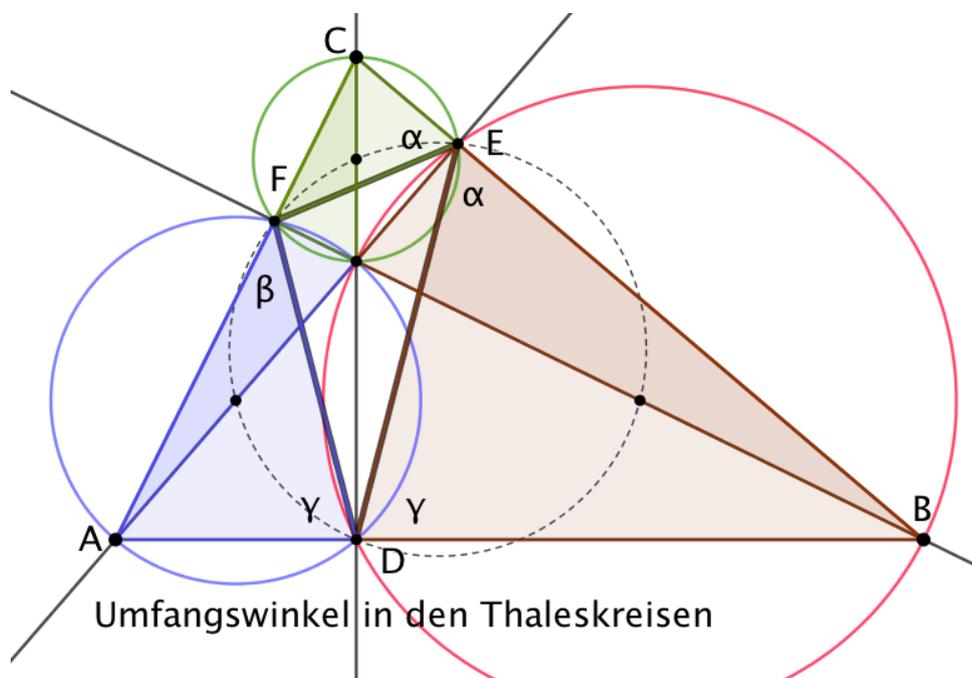
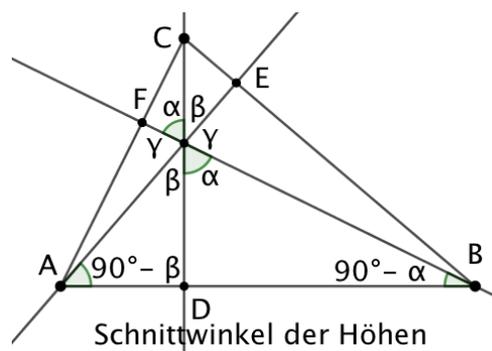
Ein konvexes Polygon, bei dem je vier Ecken auf einem Kreis liegen, hat alle Ecken auf demselben Kreis. Wenn ein konvexes Polygon kein Sehnenviereck ist, kann man also ein einbeschriebenes Viereck finden, das kein Sehnenviereck ist und dieses als Gelenkviereck betrachten. Dessen Flächeninhalt wird wegen der hergeleiteten Flächenformel vergrößert, wenn die Summe der Gegenwinkel in Richtung 180° verändert wird. Dabei vergrößert sich auch der Flächeninhalt des Polygons. Mit anderen Worten: Gelenkpolygone, die keine Sehnenvierecke sind, haben **nicht** maximalen Flächeninhalt.

Es ist ein berühmter Fehlschluss, zu glauben, damit sei der Beweis beendet. Betrachte dazu folgendes Argument: *1 ist die größte natürliche Zahl, denn jede andere natürliche Zahl kann durch Quadrieren vergrößert werden.* Diesem Argument fehlt der Existenzbeweis, dass es eine größte natürliche Zahl gibt. Der Existenzbeweis für ein Gelenkviereck mit maximalem Flächeninhalt ist mit etwas allgemeineren mathematischen Begriffen sehr einfach. ("Stetige Funktionen haben auf kompakten Mengen immer ein Maximum.")

Beispiel 5. Eigenschaften der Höhen im Dreieck

Zu den vielen interessanten Eigenschaften der Höhen will ich wenigstens etwas sagen. Wenig überraschend ist, dass sich die Höhen **im spitzwinkligen Dreieck** unter den Dreieckswinkeln α, β, γ schneiden, denn "Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind gleich". Aber damit wird im folgenden Bild erklärt, warum die Höhen des Dreiecks ABC im Dreieck DEF der Höhenfußpunkte gerade die Winkelhalbierenden sind.

Stellt man sich ABC als Billardtisch vor, so wird eine Kugel, die von D nach E läuft, so reflektiert, dass sie in Richtung F weiter läuft. Dort wird sie in Richtung D reflektiert. Man hat den Billard-Rundweg $DEFD$. Das wird mit dem Umfangswinkelsatz bewiesen:



Sei H der Schnittpunkt der Höhen. Betrachte die drei Thaleskreise mit den Durchmessern HA, HB, HC . In dem Thaleskreis über HB (rot) sind die Winkel $\angle BHE = \gamma$ und $\angle BDE$ als Umfangswinkel über der Sehne BE gleich. In dem blauen Thaleskreis sind die Winkel $\angle FHA = \gamma$ und $\angle FDA$ als Umfangswinkel über der Sehne FA gleich. Damit ist die Höhe CD Winkelhalbierende von $\angle EDF$. Dasselbe gilt an den anderen Ecken des Höhenfußpunktsdreiecks. Die Höhen halbieren also die Winkel dieses Dreiecks.

Information: Das Höhenfußpunktsdreieck ist sogar der kürzeste Rundweg, der alle Dreiecksseiten berührt - und das gilt auch in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie.

Die Mittelpunkte der Thaleskreise entstehen aus den Ecken A, B, C durch zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ vom Höhenschnittpunkt H aus.

Information: Der Kreis durch diese drei Punkte geht auch durch die Höhenfußpunkte D, E, F und durch die Seitenmitten des Dreiecks ABC . Er heißt Feuerbachkreis.

Ellipsen

Da die Kepler Ellipsen der Planetenbahnen in den Lehrplänen vorkommen und da man Ellipsen verstehen kann, wenn man Kreise versteht, folgt eine Einführung von Ellipsen.

Definition. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte E , die von zwei festen Punkten F_1, F_2 die Abstandssumme $|F_1E| + |EF_2| = 2a > |F_1F_2|$ haben. F_1, F_2 heißen *Fokalpunkte*.

Gärtnerkonstruktion der Ellipse

zur Herstellung ellipsenförmiger Beete in barocken Gärten.

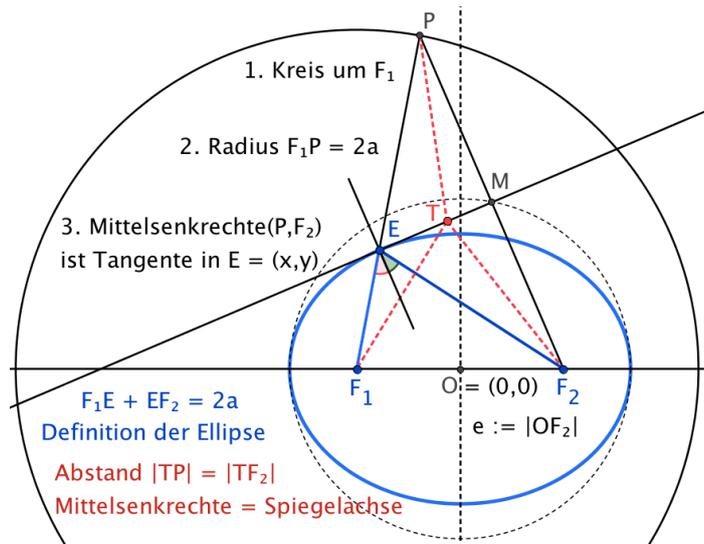
Der Gärtner schägt zwei Pflöcke F_1, F_2 in die Mittellinie des geplanten Beetes und verbindet sie mit einer Schnur der Länge $2a > |F_1F_2|$. Dann zieht er mit einem Stock die Schnur stramm und zeichnet mit ihm den Umriss des Beetes auf den Boden.

Ellipse mit Tangente zeichnen

Wähle zwei Punkte F_1, F_2 und zeichne einen Kreis vom Radius $2a > |F_1F_2|$ um F_1 . Wähle einen beliebigen Punkt P auf dem Kreis. Die Mittelsenkrechte zu PF_2 schneidet den Radius F_1P in E und sie halbiert den Winkel $\angle PEF_2$. Für die Summe der Abstände folgt:
 $|F_1E| + |EF_2| = |F_1E| + |EP| = 2a$,
 also ist E Ellipsenpunkt.

Für alle *anderen* Punkte T auf der Mittelsenkrechten gilt

$|F_1T| + |TF_2| = |F_1T| + |TP| > 2a$,
 die Mittelsenkrechte berührt also die Ellipse von außen, sie ist Tangente.



Gleichung der Ellipse.

Die beiden Abstände $|F_1E|, |F_2E|$ werden mit dem Satz des Pythagoras berechnet. Für eine übersichtliche Gleichung müssen die Wurzeln durch Quadrieren beseitigt werden, daher schreiben wir die Wurzeln auf verschiedene Seiten der Gleichung. Abkürzung: $e := |OF_2|$.

$$|F_1E| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - |F_2E| = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2$$

Subtrahiere $(x-e)^2 + y^2 + 4a^2$ und teile durch 4:

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(x-e)^2 + y^2}, \quad \text{quadriere:}$$

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2 \cdot ((x-e)^2 + y^2), \quad \text{ordne:}$$

$$a^2(a^2 - e^2) = (a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2, \quad \text{mit } b^2 := a^2 - e^2 :$$

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 \quad \text{oder meistens} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass die Ellipse aus einem Kreis vom Radius a durch Stauchung in Richtung der y -Achse im Verhältnis b/a entsteht: $(x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$. Stauchungen sind einfache *affine Abbildungen*. Deshalb sagt man: *Ellipsen sind affine Bilder von Kreisen*.

Konstruktion von Stauchungen.

Man kann Stauchungen leicht zeichnen, insbesondere also Kreise abbilden. Das liefert eine weitere elementare Ellipsenkonstruktion.

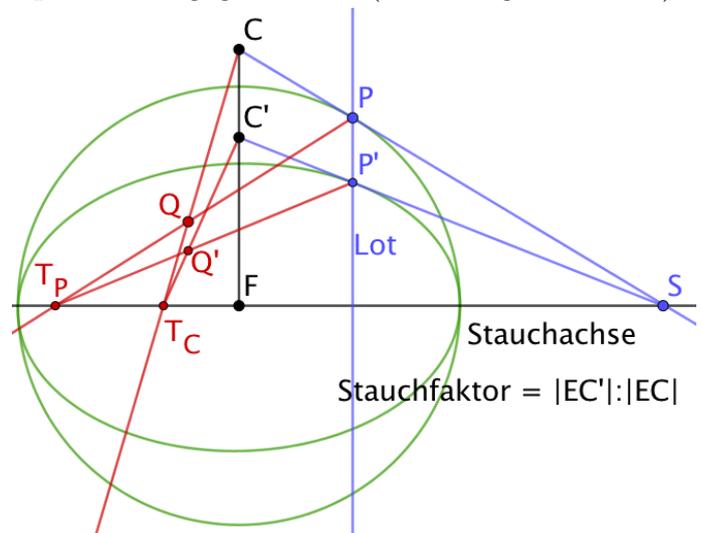
Eine **Stauchung** wird **gegeben** durch eine Stauchachse und das Stauchverhältnis λ . Für jeden Punkt C und seinen Bildpunkt C' ist die Gerade CC' **senkrecht** zur Stauchachse. Das Abstandsverhältnis von C' und C zur Stauchachse ist λ . Außer der Stauchachse muss also zur Definition nur ein Punkt-Bildpunktpaar C, C' gegeben sein (in der Figur schwarz).

Zur Abbildung eines weiteren Punktes P benötigt man drei Kreise, um das **Lot** von P auf die Stauchachse zu zeichnen. Danach schneidet man die Gerade CP mit der Stauchachse in S und erhält das Bild P' von P als Schnitt der Geraden SC' mit dem Lot (blau).

Weitere Punkte Q können ohne Kreise abgebildet werden, weil man jetzt zwei Punkte C, P und ihre Bilder C', P' zu Hilfe nehmen kann (rot):

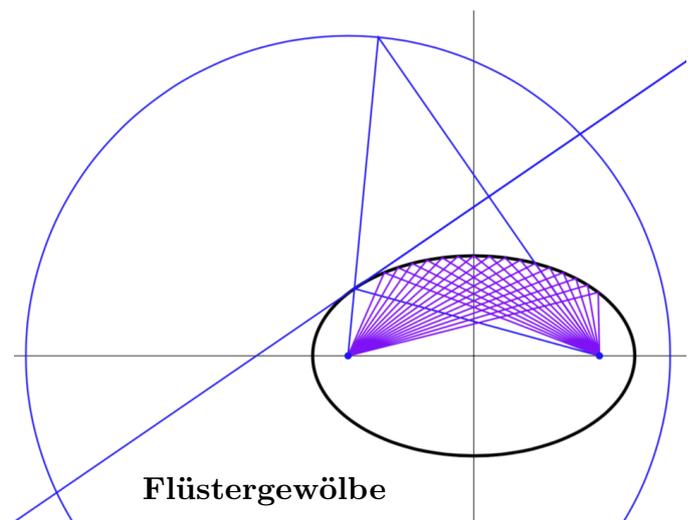
Die Gerade PQ schneidet die Stauchachse in T_P und CQ schneidet sie in T_C ; den Bildpunkt Q' erhält man als Schnitt der zwei Geraden $T_P P'$ und $T_C C'$. (Die Gerade QQ' ist natürlich senkrecht zur Stauchachse.)

P wurde so gewählt, dass die Gerade CP Tangente des Kreises um F durch P ist. Dann ist die Gerade $C'P'$ Tangente der Bildellipse. Auch dies ist also eine Ellipsenkonstruktion, die die Tangente mitliefert.



Warnung. Die einfache Konstruktion der Stauchung funktioniert nur, weil sie *Geraden in Geraden* abbildet. Für die analog definierte Stauchung der hyperbolischen Geometrie ist das **nicht** der Fall. In der Euklidischen Geometrie folgt diese sogenannte “Geradentreue” (wie so vieles) aus dem **Strahlensatz**, mit den Loten zur Stauchachse als Parallelen.

Die **Fokalfunkte** spielen bei dieser Stauchung von Kreisen keine Rolle. Aber deren *Name* muss noch erklärt werden. Das Reflektionsgesetz gilt auch für gewölbte Spiegel: Einfallswinkel gegen die Normale = Ausfallswinkel. Daher werden Lichtstrahlen aus F_1 an der Ellipse in Richtung F_2 reflektiert. Das gilt auch für Schall und ist in sogenannten *Flüstergewölben* ausgenutzt worden: Wenn die Decke eines Raumes geformt ist wie eine um die lange Achse rotierte Ellipse, so kann man an einem Fokalfunkt hören, was am anderen Fokalfunkt gesprochen wird - ohne dass das an anderen Stellen des Raumes auffällt.



Papierstreifen-Konstruktion der Ellipse

In der Antike bekannte Kurven waren häufig durch einen mechanischen Zeichenapparat definiert. Auch die Ellipse besitzt eine solche antike Konstruktion, die schon damals zur Herstellung eines Zeichengerätes für Ellipsen benutzt worden ist.

Papierstreifen-Konstruktion

Eine Strecke AB der Länge $a + b$ wird im Verhältnis $a : b$ geteilt. Werden die Endpunkte auf den Koordinatenachsen (d.h. Gerade F_1F_2 und deren Mittelsenkrechte) bewegt, so beschreibt der Teilpunkt E eine Ellipse mit den Achsen a, b .

Beweis: Bezeichnet man den Winkel der Strecke gegen die x-Achse mit φ , so hat E die Koordinaten

$$E = (a \cdot \cos \varphi, b \cdot \sin \varphi).$$

Auch hier haben wir eine einfache

Tangentenkonstruktion:

Zeichne in den Endpunkten A, B der Strecke die Lote auf die Achsen und schneide sie im Punkte D . Die Tangente steht senkrecht auf der Verbindungsstrecke DE .

Meine **Begründung** für diese Tangentenkonstruktion ist ungewohnt und wird wohl als schwierig wahrgenommen. Ich schreibe sie auf, weil sie für alle mechanisch erzeugten Kurven der Antike funktioniert - knapp 2000 Jahre vor Newton.

Bewegungen der Ebene sind einfacher, als man zunächst denkt. Wenn man in ein Brett zwei Nägel schlägt und es auf einem Tisch bewegt, so zeichnen die Nägel zwei Bahnkurven auf den Tisch. Man kann dieselbe(!) Bewegung wiederholen, indem man die beiden Nägel auf den beiden Bahnkurven entlang führt. Mit anderen Worten: *Die (horizontale) Bewegung einer Ebene ist schon durch die Bewegungen von zweien ihrer Punkte bestimmt.*

Das ist auf alle mir bekannten mechanischen Erzeugungen von Kurven anwendbar: Man kann immer zwei Punkte des Zeichenapparates entdecken, die sich besonders einfach bewegen, nämlich auf Geraden oder Kreisen. Damit stellt sich folgende Frage: *Wenn in einem Moment die Tangenten der Bewegung zweier solcher "einfacher" Punkte bekannt sind, wie kann man daraus die Tangenten der Bewegung anderer Punkte bestimmen?*

Die zwei Tangenten der einfachen Punkte kann man nur auf eine Weise erreichen. Für einzelne Punkte P mit Tangente gilt: Man kann auf der Senkrechten zur Tangente einen beliebigen Drehpunkt D wählen (nur dort!), so dass eine Drehung von P um D die gegebene Anfangstangente hat. Um zwei Punkte mit Tangenten so zu drehen, dass sie die gegebenen Anfangstangenten haben, kommt als Drehpunkt D nur der Schnittpunkt der Senkrechten auf den gegebenen Tangenten in Frage. Dann kennt man auch für jeden anderen Punkt Q die Anfangstangente: Sie ist **senkrecht** zu dem momentanen Radius DQ !

Im Papierstreifenbeispiel für die Ellipse sind die beiden einfachen Punkte die Endpunkte A, B der Strecke (des Papierstreifens), denn sie bewegen sich auf den Koordinatenachsen. Deshalb ist der Schnittpunkt der Lote in A bzw. B auf den Achsen der gesuchte Drehpunkt D und die Ellipsentangente ist senkrecht auf dem momentanen Radius DE .

