Eine möglichst einfache Antwort zu:
Welchen Fortschritt bringt Newtons Differentialrechnung?

Zu Beginn der theoretischen Physik ging es um das Verständnis der Bewegung der Planeten, des Fluges von Kanonenkugeln und anderen mechanischen Problemen. Vor Newton waren alle Geschwindigkeiten Durchschnittsgeschwindigkeiten:*zurückgelegter Weg geteilt durch die dafür benötigte Zeit.* Die Momentangeschwindigkeiten traten erst in der theoretischen Beschreibung auf. Und die Geschwindigkeiten änderten sich unter dem Einfluss von Kräften. Die dies beschreibenden physikalischen Gesetze sind einfach, wenn man die Momentangeschwindigkeiten, die Momentanbeschleunigungen benutzt, also die erste und zweite Ableitung der Bewegung. Selbst wenn man keine Grundkenntnisse in Physik hat, wird man sich vorstellen können, wie unglaublich viel schwieriger die Formulierung der Bewegungsgesetze ausfiele oder sogar unmöglich würde, wenn man sie mit Durchschnittsgrößen formulieren müsste, *weil man das Konzept der momentanen Werte nicht hat.* Das ist in der weiteren Entwicklung so geblieben: Die Gesetze der Physik werden als Differentialgleichungen formuliert, also als Gleichungen zwischen Größen und ihren Ableitungen.

Ich muss daran erinnern, dass der griechische Philosoph Demokrit formuliert hatte: *Die Materie muss aus Atomen bestehen, weil sich unendlich kleine Teile nicht zu etwas Endlichem zusammensetzen lassen.* Newtons Differentialrechnung macht eine andere Antwort möglich: Bewegungen folgen einfach formulierbaren Gesetzen, wenn man das Konzept der Ableitung besitzt.

Trotzdem bleiben Schwierigkeiten. Wenn man weiß, um wie viel sich eine Kugel in sehr kleinen Zeitintervallen weiter bewegt, dann ist es kein konzeptionelles Problem, diese kleinen Zeitintervalle zu größeren zusammenzusetzen. Aber wie – so fragte ja schon Demokrit – soll man Zeitintervalle der Länge 0 zu endlichen Intervallen zusammensetzen? Es ist eine grobe Irreführung, wenn der Monotoniesatz – Funktionen f mit $f' \geq 0$ sind schwach wachsend – in allen Schulbüchern als anschaulich klar "begründet" wird. Er gilt nicht, weil die Ableitung *Steigung* heißt, sondern umgekehrt, weil der Monotoniesatz gilt, konnten die Ableitungen als Steigungen bezeichnet werden. Konzeptionell betrachtet sind die Differentiationsregeln *Bequemlichkeitsregeln*, auch wenn man bei Beweis oder Anwendung der Kettenregel Fehler machen kann, denn alles begrifflich Schwierige steht schon in den Voraussetzungen. Der Monotoniesatz ist zusammen mit seinen Folgerungen der einzige echte Satz der Differentialrechnung, der auf der Schule vorkommt, denn der Erfolg der Analysis beruht darauf, dass aus Voraussetzungen an f' genauere Informationen über f gefolgert werden können. Ich verlange nicht, dass der Monotoniesatz bewiesen wird (notwendig indirekt und die Vollständigkeit zitierend, Text A5, S.7), ich verlange nur, dass er als fundamentales Ergebnis benannt wird. Zum besseren Verständnis folgen einige

Konsequenzen des Monotoniesatzes.

In allen Fällen werden Voraussetzungen über Ableitungen gemacht und daraus Eigenschaften der Funktion hergeleitet.

1. Vergleich von zwei Funktionen

Häufig sind an Anwendungen des Monotoniesatzes zwei Funktionen $f,\ g$ beteiligt und die Differenz $h := g - f$ erfüllt die Voraussetzung $h' \geq 0$ des Monotoniesatzes:

$$\boxed{\begin{array}{rl} x \leq y \text{ und } f' \leq g' & \Rightarrow\ g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y) \\ \text{oder:} & \Rightarrow\ f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x). \end{array}}$$

Oft ist eine Funktion gut bekannt und soll bei der Untersuchung einer anderen helfen. Z.B. sei g' konstant, d.h. $g'(x) = L$ ist eine obere Schranke von f'. Dann sagt die letzte Ungleichung

$$f(y) - f(x) \leq L \cdot (y - x).$$

Das kann man ausbauen zum sogenannten Schrankensatz:

$$|f'| \leq L \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq L \cdot |y - x|.$$

Dieser Satz wird übrigens später unabhängig von den *Dimensionen* der Argumente oder der Werte von f gezeigt und ist ein zentrales Werkzeug der Fehlerkontrolle. Der in Schulbüchern viel zitierte Spezialfall $L = 0$ besitzt keinen deutlich einfacheren Beweis.

2. Positive zweite Ableitung und Vergleich mit der Tangente

Mehrfache Wiederholung eines guten Argumentes lohnt sich an vielen Stellen in der Mathematik, siehe Figur Seite 3. Zweimalige Anwendung des Monotoniesatzes gibt z.B.:

$$\boxed{\text{Der Graph einer Funktion } f \text{ mit } f'' \geq 0 \text{ liegt oberhalb jeder seiner Tangenten.}}$$

Zum Beweis betrachten wir die Differenz h zwischen f und der Tangente bei a:

$$h(x) := f(x) - (f'(a) \cdot (x - a) + f(a)).$$

Es gilt $h'' = f'' \geq 0$, also ist h' wachsend. Daher:

$$\begin{array}{l} x \leq a\ \Rightarrow\ h'(x) \leq h'(a) = 0, \text{ also ist } h \text{ fallend,} \\ x \geq a\ \Rightarrow\ 0 = h'(a) \leq h'(x), \text{ also ist } h \text{ wachsend.} \end{array}$$

Damit hat h bei $x = a$ das Minimum $h(a) = 0$, aber $h \geq 0$ bedeutet, dass der Graph von f oberhalb der Tangente bei $x = a$ liegt (a beliebig im Definitionsbereich von f).

Ein oft zitiertes Beispiel ist die **Bernoullische Ungleichung**. Für $f(x) = (1 + x)^n$ hat man die Tangente bei $x = 0 :\ t(x) = 1 + n \cdot x$ und $f'' > 0$ rechts von $x = -1$, also:

$$-1 < x\ \Rightarrow\ (1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Kommentar: Ich finde die Aussage "$(1 + x)^n$ liegt wegen $f'' > 0$ oberhalb der Tangente $1 + nx$ bei $x = 0$ " besser und leichter zu verallgemeinern als "$(1 + x)^n \geq 1 + nx$ gilt, weil es durch Induktion bewiesen wurde".

3. Positive zweite Ableitung und Vergleich mit der Sehne

Mit einer zusätzlichen Fallunterscheidung im Beweis bekommen wir:

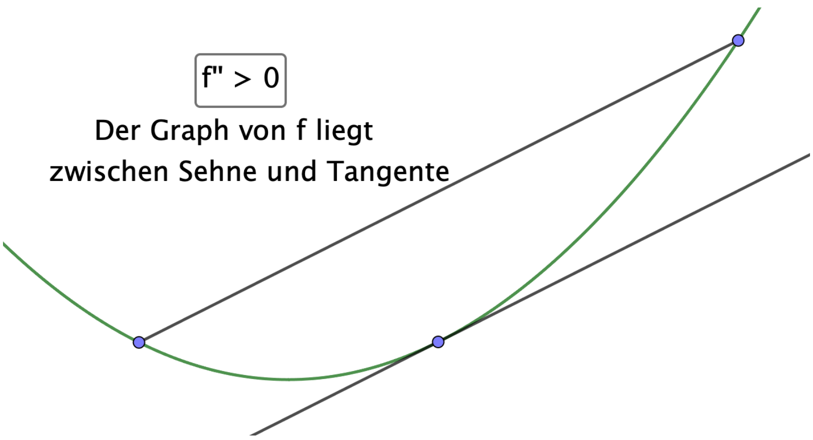
$$\boxed{\text{Der Graph einer Funktion } f \text{ mit } f'' \geq 0 \text{ liegt unterhalb jeder Sehne.}}$$

Zum Beweis betrachten wir die Differenz h zwischen f und der Sehne zwischen a und b. Die Sehne kann mit der Steigung $m := (f(b) - f(a))/(b - a)$ geschrieben werden als $S_{a,b}(x) = f(a) + m \cdot (x - a)$. Mir gefällt besser, sie als Mittelwert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ zu schreiben, also:

$$h(x) := f(x) - S_{a,b}(x) = f(x) - \frac{f(b)(x-a) + f(a)(b-x)}{b-a}.$$

Wieder liefert $h'' = f'' \geq 0$, dass h' schwach wachsend ist. Dazu ist $h(a) = 0 = h(b)$.
Nun folgt die Fallunterscheidung:
Sei $c \in (a, b)$ beliebig. Benutze den Monotoniesatz entweder in $[c, b]$ oder in $[a, c]$:
Falls $h'(c) \geq 0$, so folgt: $x \in [c, b] \Rightarrow 0 \leq h'(c) \leq h'(x)$, also h wächst in $[c, b]$ und daher $h(c) \leq h(b) = 0$;
andernfalls ist $h'(c) < 0$: $x \in [a, c] \Rightarrow h'(x) \leq h'(c) < 0$, also fällt h in $[a, c]$ und daher $0 = h(a) > h(c)$.
Es gilt also an jeder Stelle $c \in (a, b)$ die Behauptung $h(c) \leq 0$. Und das bedeutet, dass f unterhalb der Sehne liegt.
(Zusatz: Außerhalb von $[a, b]$ hat der Graph von f *keinen* Punkt unterhalb der verlängerten Sehne, denn wäre für $b_1 > b$ der Wert $f(b_1) < S_{a,b}(b_1)$, so läge $f(b)$ *oberhalb* der Sehne zwischen a und b_1 (entsprechend für $a_1 < a$).)

Allein die Voraussetzung $f'' > 0$ führt mit zweifacher Anwendung des Monotoniesatzes zu diesem Bild:



Wie können solche Aussagen ohne den Monotoniesatz gefolgert werden??

4. Multiplikativer Monotoniesatz

Überraschender Weise liefert der Monotoniesatz für *positive* Funktionen f, g auch einen **multiplikativen Vergleich** (beachte $(1/f)' = -f'/f^2$):

Behauptung: $\dfrac{f'}{f} \leq \dfrac{g'}{g} \Rightarrow \dfrac{g}{f}$ ist schwach wachsend, also $0 \leq x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{f(0)} \leq \dfrac{g(x)}{g(0)}$.

Beweis: $$\left(\frac{g}{f}\right)' = \left(g \cdot \frac{1}{f}\right)' = \frac{g'}{f} - \frac{gf'}{f^2} = \frac{g}{f} \cdot \left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}\right) \geq 0.$$

Bevor im Schulunterricht Differenzenquotienten durch "mittlere Änderungsraten" und Ableitungen durch "lokale Änderungsraten" modernisiert wurden, wurden Zerfalls*raten*, Wachstums*raten*, Geburten*raten* wegen ihrer Beziehung zu Exponentialfunktionen mit f'/f modelliert. Deshalb ist es nicht überraschend, dass der multiplikative Monotoniesatz Approximationen der Exponentialfunktion liefern kann, denn

Beispiel: $0 \leq x,\ 0 < h'(x) \leq h(x)$ und $h(0) = 1 \Rightarrow h(x) \leq \exp(x)$,
also auch: $h(x/n)^n \leq \exp(x/n)^n = \exp(x)$.

Einfache Beispiele: $h_1'(x) := 1$, Stammfunktion mit $h_1(0) = 1$: $h_1(x) = 1 + x \geq h_1'(x)$,
oder: $h_2'(x) := 1 + x$, Stammfunktion mit $h_2(0) = 1$: $h_2(x) = 1 + x + x^2/2 \geq h_2'(x)$.

Gutes Beispiel: $h_3(x) := 1 + x + x^2/2 + x^3/6 \geq h_3'(x) \Rightarrow h_3(x/n)^n \leq \exp(x)$.
Zahlenbeispiel: $0 < \exp(1) - h_3(1/8)^8 < 0{,}0002002$.

Newtons neue Konzepte sind also nicht nur für die Formulierung der Naturgesetze nützlich, sie liefern auch innerhalb der Mathematik schon ganz am Anfang ein äußerst leistungsfähiges neuartiges Werkzeug, eben den Monotoniesatz. Auch wenn dieser Satz nicht bewiesen wird, kann man seine Bedeutung herausstellen: Von "$f' = 0 \Rightarrow f = \mathit{const}$" auf Intervallen bis zu den Fehlerschranken für numerische Integrationen liefert er alle Folgerungen aus Ableitungsvoraussetzungen.

Thomas Sonar: 3000 Jahre Analysis, Springer Spektrum.
Es ist ein Risiko zu glauben, man könne die Analysis ohne Logik neu erfinden. Sogar Newton sagte, er habe auf den Schultern von Giganten gestanden.