Umwegloser Beweis des Schrankensatzes

Mir gefällt der übliche Beweis nicht, der über den (nur 1-dimensionalen) Mittelwertsatz geht, genauer erst über den Satz von Rolle und den Maximumsatz für stetige Funktionen. Ich gebe eine n-dimensionale Formulierung, die man aber auch 1-dimensional lesen kann. Dieser Beweis ist kein Sonderling, eine Reihe von Analysisbeweisen, die die Vollständigkeit brauchen, gehen nach demselben Schema: *Die Annahme, die Behauptung sei falsch, erlaubt, mit Hilfe eines Halbierungsverfahrens eine Stelle zu finden, an der ein Widerspruch entsteht.*

Schrankensatz

Es sei $D \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexes Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung wir mit DF bezeichnen (1-dimensional F').
Weiter sei eine Schranke L für die Ableitung gegeben, also

$$x \in D \Rightarrow |F'(x)| \le L \ \text{ bzw. n-dim } \ x \in D \Rightarrow ||DF_x|| \le L.$$

Dann gilt für alle $x, y \in D$ die Abschätzung (deshalb heißt L Dehnungsschranke):

$$\boxed{|F(y) - F(x)| \le L \cdot |y - x|.}$$

Anwendung: Eine Ableitungsschranke L liefert die Stetigkeit als explizite Ungleichung.

IndirekterBeweis:

Angenommen, es gibt $x_0, y_0 \in D$ *mit* $|F(y_0) - F(x_0)| > L \cdot |y_0 - x_0|$.

Zuerst schreiben wir die Ungleichung etwas brauchbarer um:
Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt $|F(y_0) - F(x_0)| \ge (L + 1/k) \cdot |y_0 - x_0|$.
Nun wähle den Mittelpunkt $m := (x_0 + y_0)/2$. Dann gilt folgende Fallunterscheidung

1. $|F(y_0) - F(m)| \ge (L + 1/k) \cdot |y_0 - m|$ oder sonst
2. $|F(m) - F(x_0)| \ge (L + 1/k) \cdot |m - x_0|$.

Im ersten Fall setze $y_1 = y_0, x_1 = m$, im zweiten Fall setze $y_1 = m, x_1 = x_0$.
Damit haben wir den wesentlichen Schritt des Beweises:

$$\boxed{|F(y_1) - F(x_1)| \ge (L + 1/k) \cdot |y_1 - x_1| \text{ und } |y_1 - x_1| = |y_0 - x_0|/2.}$$

Dieser Schritt kann beliebig oft wiederholt werden, wir erhalten also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|F(y_n) - F(x_n)| \ge (L + 1/k) \cdot |y_n - x_n| \text{ und } |y_n - x_n| = |y_0 - x_0|/2^n.$$

Anders ausgedrückt: die Strecke $\overline{x_n y_n}$ ist eine Hälfte der Strecke $\overline{x_{n-1} y_{n-1}}$.

Nun liefert die Vollständigkeit ein $z \in D$ so dass $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ z \in \overline{x_n y_n}$.

Die Differenzierbarkeit von F an der Stelle $z \in D$ besagt:

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0}\ |x - z| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(z) - DF_z(x - z)| \le \epsilon \cdot |x - z|$$

also mit der Dreiecksungleichung, der Schranke L für DF und der Wahl $\epsilon \le 1/2k$ gibt es ein δ, so dass:

(*) $\qquad |x - z| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(z)| \le (L + \epsilon) \cdot |x - z| \le (L + 1/2k) \cdot |x - z|.$

Schließlich wählen wir ein n so groß, dass $|y_n - x_n| = |y_0 - x_0|/2^n < \delta$.
Entweder z ist ein Randpunkt der Strecke $\overline{x_n y_n}$ oder in wenigstens einer der beiden Teilstrecken gilt:
$|F(y_n) - F(z)| \ge (L + 1/k) \cdot |y_n - z| > 0$ oder sonst $|F(z) - F(x_n)| \ge (L + 1/k) \cdot |z - x_n| > 0$.
Das ist ein **Widerspruch** zu der Schranke (*), die aus der Differenzierbarkeit bei z hergeleitet wurde, also ist die ursprüngliche Annahme falsch,

die Abschätzung des Schrankensatzes gilt.

Beweis des 1-dimensionalen Monotoniesatzes.

Meine Lieblingsbeweis steht in Text S5 zum Monotoniesatz. Aber ich finde interessant, wie der vorhergehende n-dim Beweis an den 1-dim Monotoniesatz Zeile für Zeile angepasst werden kann. Zuächst die Formulierung des Satzes:

> **Der Monotoniesatz**
>
> Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
> Voraussetzung: $x \in [a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0.$
> Behauptung: $x < y \in [a, b] \Rightarrow f(x) \leq f(y).$

IndirekterBeweis:

Angenommen, es gibt $x_0 < y_0 \in [a, b]$ *mit* $f(y_0) - f(x_0) < 0.$

Zuerst schreiben wir die Ungleichung etwas brauchbarer um:
Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt $f(y_0) - f(x_0) \leq -1/k \cdot (y_0 - x_0)$.
Nun wähle den Mittelpunkt $m := (x_0 + y_0)/2$. Dann gilt folgende Fallunterscheidung

1. $f(y_0) - f(m) \leq -1/k \cdot (y_0 - m)$ oder sonst
2. $f(m) - f(x_0)| \leq -1/k \cdot (m - x_0)$,

denn wenn beide Ungleichungen falsch wären, ergibt deren Summe den Widerspruch $f(y_0) - f(x_0) > -1/k \cdot (y_0 - x_0)$ zu der indirekten Annahme.
Im ersten Fall setze $y_1 = y_0, x_1 = m$, im zweiten Fall setze $y_1 = m, x_1 = x_0$.
Damit haben wir den wesentlichen Schritt des Beweises:

$$\boxed{f(y_1) - f(x_1) \leq -1/k \cdot (y_1 - x_1) \text{ und } (y_1 - x_1) = (y_0 - x_0)/2.}$$

Dieser Schritt kann beliebig oft wiederholt werden, wir erhalten also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f(y_n) - f(x_n) \leq -1/k \cdot (y_n - x_n) \text{ und } (y_n - x_n) = (y_0 - x_0)/2^n.$$

Anders ausgedrückt: das Intervall $[x_n, y_n]$ ist eine Hälfte des Intervalls $[x_{n-1}, y_{n-1}]$.

Nun liefert die Vollständigkeit ein $z \in [a, b]$ so dass $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ z \in [x_n, y_n]$.

Die Differenzierbarkeit von f an der Stelle $z \in [a, b]$ besagt:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\ |x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z) - f'(z) \cdot (x - z)| \leq \epsilon \cdot |x - z|$$

also mit der Dreiecksungleichung, der Ungleichung $0 \leq f'$ und der Wahl $\epsilon \leq 1/2k$ gibt es ein δ, so dass:

(*) $$0 \leq x - z < \delta \Rightarrow f(x) - f(z) \geq (f'(z) - \epsilon) \cdot (x - z) \ \geq\ -1/2k \cdot (x - z),$$
$$0 \leq z - x < \delta \Rightarrow f(z) - f(x) \geq (f'(z) - \epsilon) \cdot (z - x) \ \geq\ -1/2k \cdot (z - x).$$

Schließlich wählen wir ein n so groß, dass $(y_n - x_n) = (y_0 - x_0)/2^n < \delta$.
Entweder z ist ein Randpunkt des Intervalls $[x_n, y_n]$, so dass eine der beiden folgenden Ungleichungen gilt;
oder in wenigstens einem der beiden Teilintervalle gilt:
$f(y_n) - f(z) \leq -1/k \cdot (y_n - z) < 0$ oder sonst $f(z) - f(x_n) \leq -1/k \cdot (z - x_n) < 0$.
Das ist ein **Widerspruch** zu der Schranke (*), die aus der Differenzierbarkeit bei z hergeleitet wurde, also ist die ursprüngliche Annahme falsch,

die Abschätzung des Monotoniesatzes gilt.

Bemerkung. Ist eine schwach monotone Funktion f nicht streng monoton, so gibt es $x < y$ mit $f(x) = f(y)$. Die Monotonie liefert: $\xi \in (x, y) \Rightarrow f(x) \leq f(\xi) \leq f(y) = f(x)$, also f ist konstant und $f' = 0$ in (x, y). Aus $f' > 0$ im Monotoniesatz folgt: f ist streng wachsend.