Hilfestellung zum Umgang mit Ungleichungen

Die grundlegenden Eigenschaften von Ungleichungen, aus denen alle anderen Eigenschaften gefolgert werden, sind:

$$0 < a,\ 0 < b \ \Rightarrow\ 0 < a + b$$
$$0 < a,\ 0 < b \ \Rightarrow\ 0 < a \cdot b$$
$$0 > a,\ 0 > b \ \Rightarrow\ 0 < a \cdot b$$

Definition: $a < b$ genau dann wenn $0 < b - a$.

In der Analysis drückt man mit Ungleichungen aus, wie gut eine Approximation ist. Meistens spielt es keine Rolle, ob ein Fehler positiv oder negativ ist, nur seine Größe ist wichtig. Deshalb verwendet man die Betragsfunktion:

$|a| = a$ falls $a \geq 0$, $\quad |a| = -a$ falls $a < 0$.

Der *Abstand* zwischen a und b ist $|a - b|$.

Jede Betragsungleichung fasst also zwei Ungleichungen zusammen:

$|a| < p$ bedeutet ausführlicher: $-p < a < p$ oder $\pm a < p$.

Das bedeutet: Aussagen über Abstände sind leichter zu lesen, wenn sie mit Beträgen geschrieben sind, aber sie sind leichter zu beweisen, wenn man die beiden Teilaussagen einer Betragsungleichung benutzt. Beispiel:

$|a| < p$ und $|b| < q$ impliziert $|a \pm b| < p + q$

Beweis:

Ausführliche Form der Voraussetzungen:

$-p < a < p$ und $-q < +b < q$, oder auch $-q < -b < q$.

Addition der ersten und der zweiten Ungleichungskette ergibt

$-p - q < a + b < p + q$, also $|a + b| < p + q$.

Addition der ersten und der dritten Ungleichungskette ergibt

$-p - q < a - b < p + q$, also $|a - b| < p + q$.

Ich denke man sieht: Das Addieren der Ungleichungsketten ist einfach, aber das Lesen der Betragsungleichungen ist übersichtlicher.

Zeige zur Übung:

$|a - b| < p$ und $|a - c| < q$ impliziert $|b - c| < p + q$.

Aus $\pm a \leq |a|$ und $\pm b \leq |b|$ folgt durch Addition die *Dreiecksungleichung*

$\pm a \pm b \leq |a| + |b|$, also $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Für das Arbeiten mit Ungleichungen ist nun nur noch nötig, dass man lernt, statt der einfachen Buchstaben $a, b, c, \ldots, p, q, \ldots$ kompliziertere Terme ebenso zu vergleichen.

Beispiele aus Anwendungen des Monotoniesatzes

Einfachste Form des Monotoniesatze: $x < y,\ f' \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
Meistens soll eine Funktion mit Hilfe bekannterer Funktionen untersucht werden. Deshalb hat man eine Vergleichsversion (betrachte $h := g - f,\ h' \geq 0$):

$$x < y,\ f' \leq g' \ \Rightarrow\ f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x) \ \text{ oder } \ g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y).$$

Beispiel: $x < y,\ |f'| \leq L$ oder $\pm f' \leq L \quad \Rightarrow \quad \pm\big(f(y) - f(x)\big) \leq L \cdot (y - x)$,
kürzer: $\qquad |f'| \leq L \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| \leq L \cdot |y - x|$.

Feinere Ungleichungen folgen aus Voraussetzungen über die zweite Ableitung, im ersten Schritt:

$$\begin{aligned} |f''| \leq B \text{ oder } \pm f'' \leq B \quad &\Rightarrow \quad |f'(y) - f'(x)| \leq B \cdot |y - x| \\ \text{oder mit } x < y \qquad &\Rightarrow \quad \pm(f'(y) - f'(x)) \leq B \cdot (y - x). \end{aligned}$$

Der Gewinn zeigt sich erst bei der zweiten Anwendung des Monotoniesatzes. Dazu muss eine der beiden Variablen als Konstante c betrachtet werden, was zu der Fallunterscheidung $x > c$ oder $x < c$ führt. Wir haben also

$$\begin{aligned} x \geq c \Rightarrow -B \cdot (x - c) \leq f'(x) - f'(c) \leq +B \cdot (x - c) = +0.5B \cdot \big((x - c)^2\big)' \\ x \leq c \Rightarrow +B \cdot (x - c) \leq f'(c) - f'(x) \leq -B \cdot (x - c) = -0.5B \cdot \big((x - c)^2\big)' \end{aligned}$$

Mit dem Monotoniesatz folgt aus der ersten Zeile:

$$x \geq c \Rightarrow -0.5B \cdot (x - c)^2 \leq f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) \leq 0.5B \cdot (x - c)^2,$$

und aus der zweiten Zeile:

$$x \leq c \Rightarrow -0.5B \cdot (x - c)^2 \leq f'(c)(x - c) - (f(x) - f(c)) \leq 0.5B \cdot (x - c)^2,$$

Wir haben damit den Unterschied zwischen dem Graphen von f und seiner Tangente bei $x = c$ abgeschätzt:

$$|f(x) - \big(f(c) + f'(c)(x - c)\big)| \leq 0.5B \cdot (x - c)^2.$$