Primzahlzerlegung und die Beweisstrategie vom kleinsten Gegenbeispiel

Als der vorhergehende Text wieder auftauchte, war ich sehr überrascht. In der Hauptsache ist meine Meinung noch dieselbe wie damals. Ich will den alten Text nicht ändern, möchte ihm aber zwei Ergänzungen hinzufügen: Erstens soll der Anfang etwas ausführlicher werden und dabei die erwähnte, von Schülern zum Vergleich vorgeschlagene Faktorisierung von geraden Zahlen nur durch gerade Zahlen als Erklärungshilfe benutzt werden. Zweitens finde ich besser, nicht nur dem historischen Beweisweg zu folgen, sondern zu zeigen, auf wie vielfältige Weise die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung bewiesen werden kann.

Das **Sieb des Eratosthenes** ist ein so effektiver Algorithmus, dass in der Software "Matlab" Zahlen $n \in \mathbb{N}$ so faktorisiert werden, dass zuerst die Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ mit diesem Sieb berechnet werden. Sicherheitshalber beschreibe ich es kurz:
Aus der Liste der natürlichen Zahlen $\leq \sqrt{n}$ werden im ersten Schritt die Vielfachen > 2 von 2 gestrichen. Die kleinste übrig bleibende Zahl, also 3, ist sicher unzerlegbar. Im nächsten Schritt werden deren echte Vielfache gestrichen. Wieder ist die kleinste übrig bleibende Zahl, also 5, unzerlegbar. Auch ihre echten Vielfachen werden gestrichen und so weiter, bis $\sqrt{n}$ erreicht ist. – Die so gefundenen unzerlegbaren Zahlen genügen, um n zu faktorisieren, denn entweder ist n unzerlegbar oder der kleinste Faktor p_1 einer Zerlegung ist $\leq \sqrt{n}$. Dann ist $n_1 := n/p_1 < n$ und kann mit der erstellten Liste weiter faktorisiert werden.

Die so gewonnene Einsicht, dass natürliche Zahlen als Produkte unzerlegbarer Zahlen geschrieben werden können, sagt noch nichts darüber aus, dass diese Faktorisierung *bis auf die Reihenfolge eindeutige* Faktoren liefert. Um das deutlich hervorzuheben, wiederholen wir das eben Gesagte, aber wir betrachten dabei nur gerade Zahlen. Mit den *Vielfachen* von 2 sind also nur die Vielfachen mit *geraden* Faktoren gemeint: $2\cdot 2,\ 2\cdot 4,\ 2\cdot 6\ldots$. Das Sieb des Eratosthenes läßt wie vorher die gerade-unzerlegbaren Zahlen übrig: $2, 6, 10, 14, 18, \ldots$ (sogar schon im ersten Schritt). Und auch das Herstellen von Faktorisierungen mit gerade-unzerlegbaren Faktoren funktioniert wie oben besprochen. Nur, in diesem Fall ist die Faktorisierung in gerade-unzerlegbare Faktoren *nicht eindeutig*!! Die kleinsten Beispiele sind $36 = 6\cdot 6 = 2\cdot 18,\ 60 = 6\cdot 10 = 2\cdot 30$. Ich hoffe, dass sich mit diesem Beispiel Schülerinnen und Schülern vermitteln läßt, dass die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung in $\mathbb{N}$ nicht "von alleine" richtig ist, sondern bewiesen werden muss.

Dass die folgenden zwei Aussagen **leicht aus einander gefolgert** werden können, wurde zwar angesprochen, aber nicht mit genügendem Nachdruck:

(1) Die Faktoren einer Primzahlzerlegung sind bis auf die Reihenfolge eindeutig.
(2) Teilt eine Primzahl p ein Produkt $a \cdot b$, so teilt sie einen der Faktoren a, b.

Beweis 1) $\Rightarrow$ 2): Das Produkt der Primzahlzerlegungen von a und b ist die eindeutige Primzahlzerlegung von $a \cdot b$. Eine von diesen Faktoren verschiedene Primzahl p kann $a \cdot b$ nicht teilen, weil wir oben gezeigt haben, dass es sonst eine zweite, nämlich p enthaltende Primfaktorisierung von $a \cdot b$ gäbe.

Beweis 2) $\Rightarrow$ 1): Wenn Aussage (2) zur Verfügung steht, kann man eine Gleichung

$$\prod_{j=1}^{j=r} p_j = \prod_{k=1}^{k=s} q_k = q_1 \cdot (\prod_{k=2}^{k=s} q_k) \quad \text{mit} \quad \forall_{j,k}\ p_j \neq q_k$$

so widerlegen: Da p_1 das rechte Produkt teilt, teilt p_1 wegen (2) einen der Faktoren. Daher ist entweder $p_1 = q_1$ (Widerspruch) oder p_1 teilt den anderen Faktor $\prod_{k=2}^{k=s} q_k$ – ein *kürzeres* Produkt. Nach spätestens s Schritten erhält man den Widerspruch, dass p_1 mit einem der q_k übereinstimmen muss.
Die einfacher *aussehende* Aussage (2) (die schon Euklid benutzte) ist also nur um ein kurzes Argument einfacher als (1).

Schließlich betonte der Text aus dem Jahre 1997 den **Nutzen der Reste** mod p, also die Zerlegungen $a = k \cdot p + r,\ b = \ell \cdot p + s,\ 0 \leq r, s < p$. Eine wesentliche Vereinfachung beruhte darauf,

dass die Produkte $a \cdot b$ und $r \cdot s$ bei Division durch p **denselben Rest** lassen.

Leider habe ich die Begründung dem Leser überlassen statt die Differenz hinzuschreiben: $a \cdot b - r \cdot s = k\ell p^2 + kps + \ell pr$, so dass man den Faktor p in der Differenz nicht übersehen kann. Hier muss p noch nicht Primzahl sein, dass spielt erst etwas später im Beweis eine Rolle.
Zu meiner Schulzeit und bis zum Auftritt der Taschenrechner habe ich die Neunerprobe sehr geschätzt. Sie beruht auf dem geschilderten Verhalten der Reste mit $p = 9$ und darauf, dass der Rest einer Zahl mod 9 sehr schnell berechnet werden kann - er ist gleich der (Summe der Ziffern) mod 9, weil alle Zehnerpotenzen bei Division durch 9 den Rest 1 lassen. Heute sind Überschlagsrechnungen wichtiger, um sich vor Tippfehlern bei der Eingabe in den Taschenrechner zu schützen. Wichtig geblieben ist der Aufbau einer guten Intuition für unsere dezimale Schreibweise der Zahlen und dabei kann man sich gut von einer Erklärung der Neunerprobe unterstützen lassen.

Was anders ist als 1997, ist die weitgehende Beseitigung von Beweisen aus Lehrplänen und Schulbüchern zur Mathematik. Zu den Opfern gehört auch die vollständige Induktion. Daher möchte ich eine Beweisstrategie vorschlagen, die weniger ritualisiert (als Induktionsbeweise), kürzer formulierbar und gleichzeitig flexibler anwendbar ist, und sie an Beispielen illustrieren:

Die Beweisstrategie mit dem kleinsten Gegenbeispiel.

Man versteht das am besten an Beispielen. Grob gesagt geht das Verfahren so: Man möchte eine Aussage beweisen, die von natürlichen Zahlen abhängt. Wenn sie falsch ist, muss es (mindestens) ein Gegenbeispiel geben und da sie von natürlichen Zahlen abhängt, kann man sich oft ein kleinstes Gegenbeispiel vorstellen. Der Beweis besteht dann darin, aus der Existenz eines solchen *kleinsten* Gegenbeispiels einen Widerspruch herzuleiten.
In Induktionssituationen bedeutet der Induktionsanfang, dass man nicht sofort ein

(natürlich kleinstes) Gegenbeispiel hat und der Induktionsschritt zeigt, dass man kein Gegenbeispiel erreichen kann. Das folgende Beispiel geht nicht mit Induktion sondern mit der dritten binomischen Formel $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$:

Das Prinzip vom kleinsten Verbrecher
und die Irrationalität von Quadratwurzeln

Wenn Gegenbeispiele zu einer richtigen, aber noch nicht bewiesenen Behauptung eine Größe haben, führt es oft zu einem Beweis, wenn man ein – hypothetisches – **kleinstes Gegenbeispiel** betrachtet.
Ich habe diese Beweismethode bei Emil Artin als "Prinzip vom kleinsten Verbrecher" kennen gelernt.

Ich führe das an einem Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{3}$ vor:
Wir benutzen $(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)=2$ und $1<\sqrt{3}<2$. Angenommen $\sqrt{3}$ wäre rational und $\sqrt{3}=p/q$ eine Darstellung mit **kleinstem** Nenner q. Dann rechnen wir zuerst so:

$$\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}-2=\frac{2}{p/q-1}-2=\frac{2q}{p-q}-2=\frac{3q-2p}{p-q},$$
$$1<p/q<2 \;\Rightarrow\; q<p<2q \;\Rightarrow\; 0<p-q<q,$$

und stellen dann fest, dass wir eine Darstellung für $\sqrt{3}$ mit dem **kleinerem** Nenner $p-q<q$ gefunden haben. Eine Darstellung von $\sqrt{3}$ als Bruch mit kleinstem Nenner kann es also nicht geben und $\sqrt{3}$ ist irrational.

Damit es nicht wie ein Trick für $\sqrt{3}$ aussieht, noch $\sqrt{91}$:
Damit man Quadratzahlen vermeidet, muss man zuerst zwei **benachbarte** ganze Zahlen finden, zwischen denen die gesuchte Wurzel liegt: $9<\sqrt{91}<10$. Dann wie eben:

$$(\sqrt{91}-9)\cdot(\sqrt{91}+9)=91-9^2, \text{ also } \sqrt{91}=-9+10/(\sqrt{91}-9).$$

Die Annahme einer Darstellung $\sqrt{91}=p/q$ mit **kleinstem** Nenner q ergibt

$$\sqrt{91}=-9+\frac{10}{p/q-9}=-9+\frac{10q}{p-9q} \text{ mit } 0<p-9q<q \text{ wegen}$$
$$9<p/q<10 \;\Rightarrow\; 9q<p<10q \;\Rightarrow\; 0<p-9q<q.$$

Es folgt also wieder eine Darstellung mit **kleinerem** Nenner – Widerspruch!

Allgemein beginnt man mit $k^2<a<(k+1)^2$ und zeigt wie eben, ausgehend von $(\sqrt{a}-k)\cdot(\sqrt{a}+k)=a-k^2$, dass die Annahme $\sqrt{a}=p/q$ mit **kleinstem** Nenner q einen Widerspruch ergibt.

Als nächstes zeige ich Beweise zu den oben als äquivalent nachgewiesenen Aussagen (1) und (2) mit dieser Beweisstrategie. Am Schluss benutze ich die 3. binomische Formel noch einmal: *Für Approximationen*, Seiten 7-9.

Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt Primzahl, wenn sie nur 1 und p als Teiler hat. Dass p Teiler einer Zahl a ist, wird so ausgedrückt: $p|a$, gelesen: p *teilt* a.

Natürliche Zahlen, die keine Primzahlen sind, kann man in Produkte zerlegen, bis alle Faktoren Primzahlen sind. Man kann für kleine Zahlen leicht ausprobieren, dass diese Primzahlzerlegung bis auf die Reihenfolge eindeutig ist.

Satz

$$\boxed{\text{Die Primzahlzerlegung in } \mathbb{N} \text{ ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.}}$$

Folgerung: Wenn p ein Produkt teilt, teilt p einen Faktor:

$$p \in \mathbb{N} \text{ Primzahl und } p|(a \cdot b) \Rightarrow p|a \text{ oder } p|b,$$

denn das Produkt der Primfaktorisierungen von a und b gibt die eindeutige Primfaktorisierung von $a \cdot b$.

Beweis.
Wenn die Primzahlzerlegung nicht eindeutig wäre, dann gäbe es ein **kleinstes** $n \in \mathbb{N}$, das auf zwei verschiedene Weisen Produkt von Primzahlen ist:

$$\prod_{j=1}^{r} p_j = n = \prod_{k=1}^{s} q_k,$$

Wir können dabei annehmen: $r, s \geq 2,\ \ \forall_{j,k}\ p_j \neq q_k$ und $p_1 \leq p_j,\ q_1 \leq q_k$.

Nun betrachte die Zahl $m := n - p_1 \cdot q_1 < n$. Da p_1, q_1 verschiedene Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ sind, gilt auch $1 < m$. Nach Wahl von n besitzt m eine **eindeutige** Primzahlzerlegung und es gilt:

$$p_1 \cdot (p_2 \cdot \ldots \cdot p_r - q_1) = m = q_1 \cdot (q_2 \cdot \ldots \cdot q_s - p_1)$$

Wegen $p_1 \neq q_1$ muss p_1 einer der Primfaktoren von $q_2 \cdot \ldots \cdot q_s - p_1$ sein. Deshalb teilt p_1 auch das Produkt $q_2 \cdot \ldots \cdot q_s < n$ und stimmt – weil eben n die kleinste Zahl mit nicht eindeutiger Zerlegung ist – mit einer der Primzahlen $q_2, \ldots, q_s$ überein. Das ist ein Widerspruch dazu, dass alle p_j verschieden von allen q_k sind, so dass die Annahme, es gäbe solch eine kleinste Zahl n mit nicht eindeutiger Primzahlzerlegung, unmöglich ist.

Wenn eine Primzahl ein Produkt teilt, teilt sie einen Faktor

$$\boxed{\textbf{Satz:}\quad 1 < p \in \mathbb{N},\ p \text{ unzerlegbar},\ p|(a \cdot b) \ \Rightarrow\ p|a \text{ oder } p|b.}$$

Auch dieser Satz kann mit dem Prinzip vom kleinsten Verbrecher bewiesen werden, ohne vorher Euklids Darstellung des ggT zu zeigen. Aus dem Satz folgt die schon am Anfang gezeigte Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung (für die unabhängige Lesbarkeit der Seiten noch einmal):
Hat man eine Faktorisierung von $n \in \mathbb{N}$ in J Primfaktoren,

$$n = \prod_{j=1}^{j=J} p_j = p_1 \cdot \prod_{j=2}^{j=J} p_j$$

dann kann **keine andere** Primzahl $p \neq p_1, \ldots, p_J$ dies Produkt teilen, denn

$$p \neq p_1 \Rightarrow p \mid \left(\prod_{j=2}^{j=J} p_j \right) \quad \text{usw..}$$

Wie die Kürze dieses Beweises zeigt, formuliert der Satz eine besonders wichtige Eigenschaft der Primzahlen.

Annahme:
Es gibt zu irgendeinem unzerlegbaren p ein **kleinstes** Gegenbeispiel zu dem Satz.
Also $1 < p \in \mathbb{N}$ sei unzerlegbar. $a \cdot b$ sei das **kleinste** durch p teilbare Produkt, für das p **keinen** der Faktoren a, b teilt.

Behauptung:
Dann gibt es *doch* ein kleineres Produkt $\tilde{a} \cdot b$ mit $p|(\tilde{a} \cdot b)$, aber p teilt keinen der Faktoren. Mit anderen Worten: Ein kleinstes Gegenbeispiel kann es nicht geben.

Beweis:
Wir machen eine Fallunterscheidung $p < a$ oder $p > a$.
Ist $p < a$, so ist $a \cdot b - p \cdot b = (a - p) \cdot b = \tilde{a} \cdot b$ ein kleineres Produkt, das durch p teilbar ist, ohne dass p einen der Faktoren teilt.

Ist $p > a$, so kann man wegen der Unzerlegbarkeit von p eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k \cdot a < p < (k + 1) \cdot a$ finden, also $0 < p - k \cdot a < a$.
Wegen $a > 1$ folgt $k < p$, wegen $p|(a \cdot b)$ folgt $p \leq (a \cdot b)$, also $a \cdot k < a \cdot b,\ k < b$.
Definiere $\tilde{a} := p - k \cdot a < a$. Dann teilt p auch das Produkt $(p - k \cdot a) \cdot b < a \cdot b$. Da $a \cdot b$ das kleinste Gegenbeispiel ist, muss p den Faktor $\tilde{a} = p - k \cdot a$ teilen. Daher muss p das Produkt $k \cdot a < a \cdot b$ teilen und damit wieder mindestens einen Faktor. Das ist ein Widerspruch, denn p teilt weder k noch a. Auch im Falle $p > a$ kann es kein kleinstes Gegenbeispiel zu dem Satz geben.

Mit Hilfe der Reste r, s der Zerlegung $a = k \cdot p + r,\ b = \ell \cdot p + s,\ 0 \leq r, s < p$ und $a \cdot b - r \cdot s = 0 \bmod p$ kann man auch mit einem anders gewählten kleinsten Gegenbeispiel argumentieren (und so die Flexibilität der Methode demonstrieren):

Etwas umformuliert wollen wir also zeigen

$$\boxed{\textbf{Satz:} \quad 1 < p \in \mathbb{N},\ p \text{ unzerlegbar},\ 0 < r, s < p \ \Rightarrow\ r \cdot s \neq 0 \bmod p.}$$

Für die kleinsten Primzahlen $2, 3$ ist das offensichtlich richtig.

Annahme: q ist die **kleinste** Primzahl, für die der Satz **falsch** ist.
Mit anderen Worten: Es gibt Reste $0 < r, s < q$ mit $r \cdot s = k \cdot q$.

Daraus folgt ein Widerspruch:
Alle Primfaktoren von r und s sind $< q$, also ist für sie der Satz richtig. Da sie das Produkt $k \cdot q$ teilen, müssen sie einen Faktor teilen und, weil q Primzahl ist, müssen sie k teilen. Wir können also das Produkt $k \cdot q$ so lange durch Primfaktoren von r, s teilen, bis der Faktor k auf 1 reduziert ist. Dann haben wir den Widerspruch, dass q als Produkt von kleineren Primzahlen geschrieben ist.
Es kann also keine Primzahl geben, für die der Satz falsch ist.

Folgerung: Für jede Primzahl p gilt:

$$0 < r, s_1, s_2 < p,\ s_1 \neq s_2 \ \Rightarrow\ r \cdot s_1 - r \cdot s_2 \neq 0 \bmod p.$$

Folgerung: Multipliziert man $r \neq 0 \bmod p$ mit allen Resten zwischen 0 und p, so bekommt man mod p wieder *alle* Reste zwischen 0 und p. Insbesondere gibt es einen Rest s, so dass $r \cdot s = 1 \bmod p$ ist. Alle Reste $r \neq 0 \bmod p$ sind also mod p invertierbar.

Die Restklassen mod p bilden also einen Körper mit p Elementen.

Bemerkung: Komputerrechnungen mit endlich Körpern können nie daran scheitern, dass Zwischenergebnisse zu groß werden. Auch Rundungsfehler sind vermeidbar.

Wurzelziehen mit der dritten binomischen Formel

Mir ist dieser Abschnitt wichtig, weil Potenzen mit rationalen Exponenten $a^{m/n}$ behandelt werden, deutlich ehe die Analysis das Newton-Verfahren als effektives Berechnungsverfahren für n-te Wurzeln bereitstellt.
Man kann mit der 3. binomischen Formel Quadratwurzeln – und mit einer nützlichen Verallgemeinerung n-te Wurzeln – ohne Analysiskenntnisse berechnen. Ich stelle ein Verfahren vor, das abwechselnd *zu große und zu kleine* Näherungen liefert und damit die Fehlerkontrolle sehr einfach macht. Zur Begründung dieses alternierenden Verhaltens muss man nur verstehen, dass der Wert eines Bruches *kleiner* wird, wenn man seinen Nenner *vergrößert*. Das allein liefert noch nicht, dass die Näherungen bei jedem Schritt auch *besser* werden. Dass tatsächlich verbessert wird, ist eine Anwendung der Prozentrechnung, die ich erklären muss.
Die Information durch die Ungleichung $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ drücke ich so aus:

Die Ungleichung gibt Näherungswerte für $\sqrt{2}$ an, die einen *absoluten Fehler* $0{,}1 = 1{,}5 - 1{,}4$ und einen *relativen Fehler* $0{,}1/1{,}4 = 0{,}071 \approx 7\%$ haben.

Relative Fehler werden in Prozent angegeben, damit man sie nicht mit absoluten Fehlern verwechselt. Über das Verhalten dieser Fehler muss man Folgendes wissen:

Addiert man fehlerlose(!) Konstanten, z.B. $(2+1{,}4) < (2+\sqrt{2}) < (2+1{,}5)$, so *ändern sich die absoluten Fehler offensichtlich nicht*, wärend die *relativen Fehler abnehmen*: $0{,}1/(2+1{,}4) = 0{,}0294 \approx 3\%$. (Beim Auftreten negativer Zahlen können sie auch zunehmen.)

Multiplikation mit fehlerlosen Konstanten, $(9 \cdot 1{,}4) < (9 \cdot \sqrt{2}) < (9 \cdot 1{,}5)$, *ändert die absoluten Fehler* mit demselben Faktor, während die *relativen Fehler unverändert* bleiben.

Invertieren, z.B. $1/1{,}4 > 1/\sqrt{2} > 1/1{,}5$, ergibt gänzlich andere absolute Fehler aber *ungefähr dieselben relativen Fehler* - falls diese klein genug sind:

$$\frac{1/x - 1/(x+\Delta)}{1/x} = 1/x \cdot \frac{1 - 1/(1+\Delta/x)}{1/x} \approx 1 - (1 - \Delta/x) = \frac{\Delta}{x}$$

Auf Seite 3 hatten wir die binomische Formel $(\sqrt{91} - 9)(\sqrt{91} + 9) = 10$ zu einem Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{91}$ benutzt. Jetzt benutzen wir folgende Umstellung und Abschätzung:

$$9 < \sqrt{91} = 9 + \frac{10}{\sqrt{91} + 9} < 10.$$

Diese Gleichung wird nun benutzt, um aus einer Nährung r_1 für $\sqrt{91}$ eine neue Näherung r_2 zu berechnen:

$$r_2 = 9 + \frac{10}{r_1 + 9}$$

Die oben versprochene alternierende Eigenschaft dieses Verfahrens ist offensichtlich:

$$r_1 < \sqrt{91} \Rightarrow r_2 > \sqrt{91}, \quad r_1 > \sqrt{91} \Rightarrow r_2 < \sqrt{91}, \quad r_1 = r_2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{91}.$$

Die fehlerverbessernde Eigenschaft zeigen wir mit Prozentrechnung: Setzen wir im Nenner statt $\sqrt{91}$ eine Approximation r mit einem Fehler $\le 1\%$ ein, so ist nach Addition der etwa gleich großen Konstante 9 der Nennerfehler ungefähr halb so groß. Beim Multiplizieren mit Konstanten ändern sich prozentuale Fehler nicht und auch das Reziproke hat ungefähr denselben prozentualen Fehler. Daher hat $10/(r+9)$ einen Fehler $\le 0,5\%$. Weiter ist dieser Bruch um etwa den Faktor 18 kleiner als die zu addierende Konstante 9. Um etwa diesen Faktor sinkt der prozentuale Fehler, so dass wir schließen: *Der relative Fehler von* $9 + 10/(r+9)$ *ist nur noch* $\le 0.028\%$*, also etwa um den Faktor* 35 *kleiner als der Fehler von* r.

Beispiel.

$$\sqrt{91} \approx 9{,}539392,\ \ r = 9{,}6,\ \ r - \sqrt{91} \approx 0{,}06,$$

$$rr = 9 + \frac{10}{r+9} = 9{,}5376, \quad \sqrt{91} - rr \approx 0{,}00176 \approx 0{,}06/34$$

Die Prozentrechnung hat die Fehlerverbesserung also sehr gut vorhergesagt!

Später kann dies Beispiel in der Analysis wieder aufgegriffen werden. Betrachte die rationale Funktion

$$f(x) := 9 + 10/(x+9) \quad \text{mit} \quad f(\sqrt{91}) = \sqrt{91}.$$

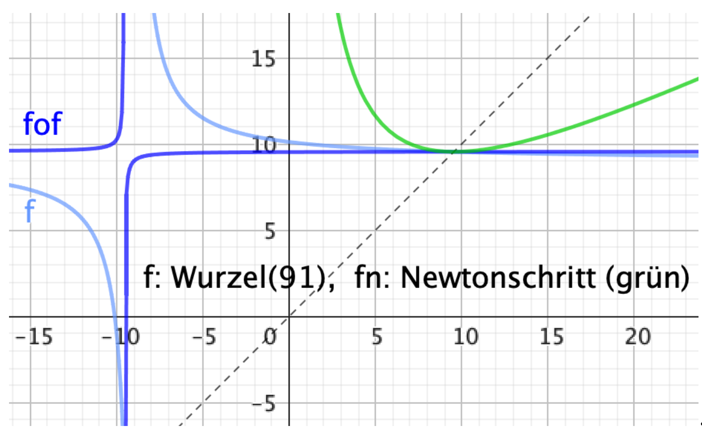
Man sagt $\sqrt{91}$ *ist ein Fixpunkt von* f.

Die nebenstehende Abbildung zeigt, dass $f(x)$ und $f \circ f(x) := f(f(x))$ ein ziemlich großes Intervall auf Werte sehr nahe bei $\sqrt{91}$ abbilden, ein größeres Intervall als das Newton-Verfahren fn(x)!

Die Analysis erklärt das mit Hilfe der Ableitung von f am Fixpunkt:

$$f'(x) = \frac{-10}{(x+9)^2},\ \ f'(\sqrt{91}) \approx \frac{-1}{34.7}$$

$$f(x) - f(\sqrt{91}) \approx \underline{\underline{f'(\sqrt{91})}} \cdot (x - \sqrt{91})$$



Wir erhalten dieselbe Übereinstimmung mit der Prozentrechnung. $f'(x) < 0$ ist für das alternierende Verhalten verantwortlich.

Ich fand überraschend, dass sich diese Anwendung ausdehnen läßt:

n-te Wurzeln und die dritte binomische Formel

Auf genau dieselbe Weise kann man mit einer Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel auch n-te Wurzeln ziehen, also *deutlich bevor die Analysis das meistens verwendete Newtonverfahren bereitstellt*

3. Binomische Formel $\qquad$ Verallgemeinerung

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a), \quad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + xa + a^2),$$
$$x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)$$
$$x^5 - a^5 = (x-a)(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4)$$

Bemerkung. Der zweite Faktor der Verallgemeinerung ist eine geometrische Reihe mit dem Faktor a/x. Man bereitet also die spätere Summenformel der geometrischen Reihe vor. Hier wird die Verallgemeinerung durch Ausmultiplizieren der Klammern gezeigt.

Anwendung. Voraussetzung $s^3 < a$. Aus der 3. binomischen Formel folgt:

$$\sqrt[3]{a} = s + \frac{a - s^3}{s^2 + s\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2}, \quad f_s(x) := s + \frac{a - s^3}{s^2 + sx + x^2}, \quad \left[\begin{array}{c} f_s(x) = x \quad \Rightarrow \\ x^3 - s^3 = a - s^3 \end{array}\right]$$

Beispiel. $14^3 = 2744 < 3 \cdot 1000 < 3375 = 15^3$, also

$$\sqrt[3]{3}000 = 14 + \frac{256}{196 + 14\sqrt[3]{3}000 + \sqrt[3]{3}000^2} < 15, \ f_{14}(x) := 14 + \frac{256}{196 + 14x + x^2}$$

Setzt man eine zu kleine Näherung $x < \sqrt{91}$ ein, so ist der Nenner von f_s zu klein, also der Wert $f_s(x) > \sqrt{91}$, und umgekehrt. Dies Alternieren stimmt nur, weil $a - s^3 > 0$ vorausgesetzt wurde. – Damit die Näherungen tatsächlich *besser* werden, muss $a - s^3$ klein genug sein. Das vorherige Argument mit der Prozentrechnung liefert dann, dass $f_s(x)$ eine bessere Näherung ist als x und ungefähr wie groß die Verbesserung ist. Da die Werte (wegen $s^3 < a$) abwechselnd zu groß und zu klein sind, bekommt man die *Fehlerabschätzung geschenkt.* Diesen Umgang mit Funktionen kann man also deutlich vor Beginn der Analysis üben und damit die Differentialrechnung sowohl vorbereiten wie später erklärend zurückblicken lassen.

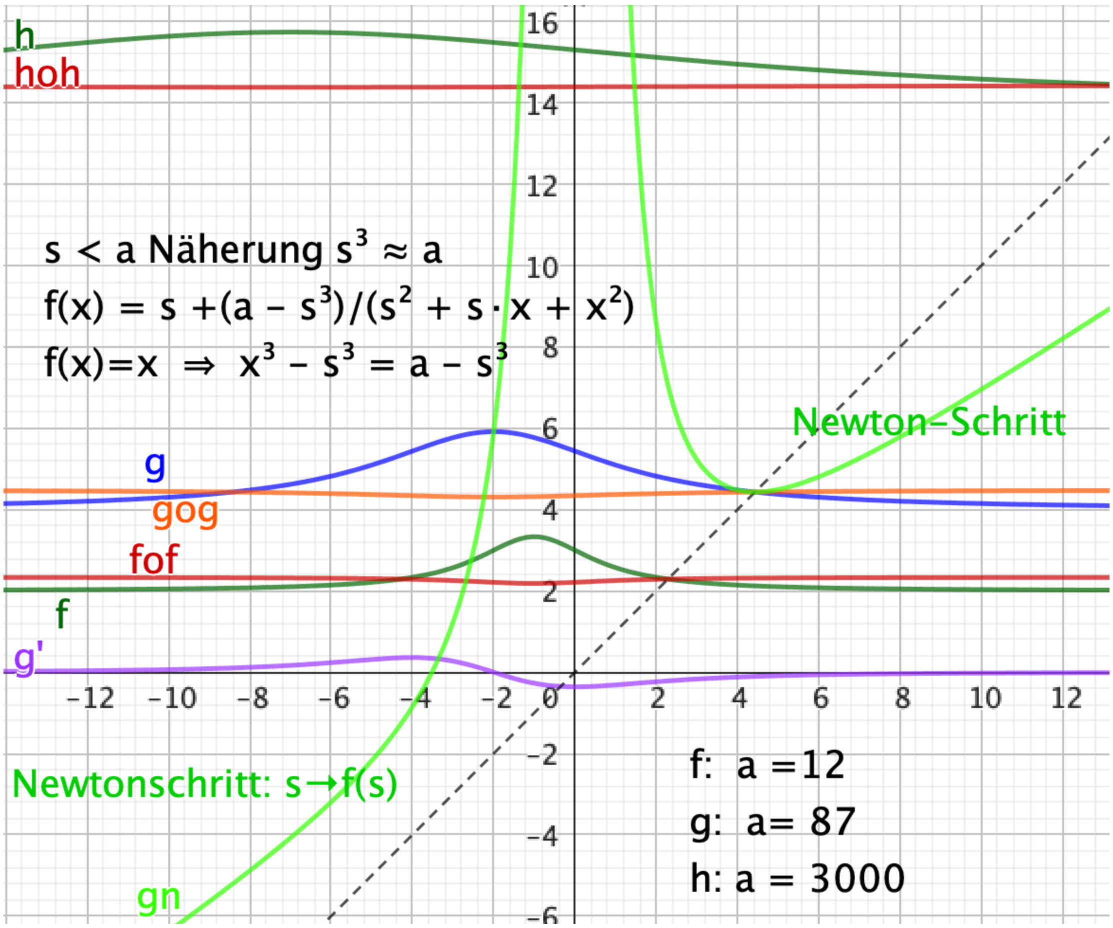
Numerisches Beispiel.

Startwert $r = 14{,}5$, erste Verbesserung $rr := f_{14}(r) = 14{,}42019, \ rr^3 = 2998{,}56$,
zweite Verbesserung $rr_+ := f_{14}(rr) = 14{,}422565, \quad (rr_+)^3 = 3000{,}043$,
dritte Verbesserung $rr_- := f_{14}(rr_+) = 14{,}42249364 \quad (rr_-)^3 = 2999{,}9987$.

Bemerkung. Die Fehlerverkleinerung ist um so besser, je kleiner $a - s^3$ ist. Während der Rechnung erhält man, wegen des alternierenden Verhaltens, in jedem zweiten Schritt eine größere **untere** Schranke für $\sqrt[3]{a}$, im numerischen Beispiel rr_-. Man kann also in jedem zweiten Schritt den Parameter s auf die neue untere Schranke anheben und damit die Konvergenzgeschwindigkeit erhöhen.

Vierte Verbesserung $rR_+ := f_{rr_-}(rr_-) = 14{,}4224957031, \quad \underline{(rR_+)^3 = 3000{,}00000002}$.

Die Analysis lehrt dann später, dass unsere letzte Verbesserung $s \mapsto f_s(s)$ ein Schritt des berühmten Newton-Verfahrens ist. Allerdings liefert das Newton-Verfahren hier immer *zu große* Werte, also keine automatische Fehlerabschätzung wie die Iteration mit f_s. Punktsieg für die 3. binomische Formel.



h
hoh
s < a Näherung s³ ≈ a
f(x) = s +(a − s³)/(s² + s · x + x²)
f(x)=x ⇒ x³ − s³ = a − s³
Newton–Schritt
g
gog
fof
f
g'
Newtonschritt: s→f(s)
gn
f: a =12
g: a= 87
h: a = 3000