Deskriptive Mengenlehre in Hausdorffs Grundzügen der Mengenlehre *

Vladimir Kanovei Peter Koepke

7. März 2001

Die Wurzeln der deskriptiven Mengenlehre, deren Entwicklung FELIX HAUSDORFF durch seine Lehrbücher und wissenschaftlichen Aufsätze wesentlich beeinflusst hat, liegen in Arbeiten von GEORG CANTOR zur Punktmengenlehre [Ca-1872, Ca-1884] und von ÉMILE BOREL, RENÉ LOUIS BAIRE und HENRI LEBESGUE zur Maßtheorie und zur allgemeinen Funktionentheorie [B-LTF, B-LFR, Ba-1899, Ba-1909, Lb-1905]. Gegenstand der Untersuchungen waren Mengen und Funktionen, die mit „analytischen“ Methoden gebildet werden können, etwa als *abzählbare* Durchschnitte und Vereinigungen von Intervallen oder als punktweise Limites von Funktionenfolgen.

Der Begriff „deskriptive Mengenlehre“, der erst um 1930 aufgetreten ist, soll zum Ausdruck bringen, dass die betrachteten Objekte – im Gegensatz zu den allgemeinen Mengen und Funktionen der CANTORschen Mengenlehre – „definierbar“ oder „beschreibbar“ sind (franz. *décrit*). Zur Zeit der *Grundzüge der Mengenlehre* von FELIX HAUSDORFF bestand die deskriptive Mengenlehre im Wesentlichen in der Charakterisierung und Klassifizierung BORELscher Mengen und BAIREscher Funktionen. Der damalige Wissensstand wird durch die Aufsätze [Lb-1905] von LEBESGUE und [Ba-1909] von BAIRE umrissen.

Die deskriptive Mengenlehre nimmt einen breiten Raum im Schaffen HAUSDORFFs ein. Ungefähr 50 Seiten der *Grundzüge* sind aus heutiger Sicht diesem Gebiet zuzuordnen (siehe Abschnitt 1); von den publizierten Arbeiten gehören sieben ganz und weitere teilweise zur deskriptiven Mengenlehre (Abschnitt 2)); in der vollkommen überarbeiteten Neuauflage der *Grundzüge* unter dem Titel *Mengenlehre* [H-M2, H-M3] stellt HAUSDORFF den Stand der deskriptiven Mengenlehre umfassend dar; der handschriftliche Nachlass enthält fast 2000 Seiten Material zur deskriptiven Mengenlehre.

*Eine umfassende Kommentierung der deskriptiven Mengenlehre in HAUSDORFFs Gesamtwerk findet sich im Band III dieser Ausgabe

Zu den hervorragenden Leistungen HAUSDORFFs auf dem Gebiet der deskriptiven Mengenlehre zählen die Bestimmung der Kardinalitäten von BORELmengen, die Konstruktion HAUSDORFFscher Lücken, die Theorie vollständiger metrischer Räume und das Konzept der δs-Operationen. Verschiedene von HAUSDORFF eingeführte Begriffe und Bezeichnungen sind in die Sprache der deskriptiven Mengenlehre eingegangen. In den *Grundzügen* baut HAUSDORFF die deskriptive Theorie zum ersten Mal als eine Theorie von *Mengen* und nicht als eine Theorie von *Funktionen* auf. Diese Sichtweise hat sich historisch durchgesetzt. Die *Mengenlehre* ist das erste *Lehrbuch* zur deskriptiven Mengenlehre.

Die deskriptive Mengenlehre beginnt in den Publikationen HAUSDORFFs und in den im Nachlass erhaltenen Arbeiten etwa zeitgleich mit den *Grundzügen*. Das Gesamtgebiet wird im Band III dieser Ausgabe ausführlich kommentiert. Der vorliegende Kommentar beschränkt sich auf die einschlägigen Teile der *Grundzüge* und ist in folgende Abschnitte gegliedert:

1. Deskriptive Mengenlehre in HAUSDORFFs *Grundzügen* (Übersicht).
2. Deskriptive Mengenlehre in den übrigen Arbeiten HAUSDORFFs (Übersicht).
3. Zur Entwicklung der deskriptiven Mengenlehre bis zu den *Grundzügen*.
4. HAUSDORFFs Einführung von BORELmengen in metrischen Räumen.
5. Kardinalitäten von BORELmengen.
6. Reduzible Mengen und Differenzenketten.
7. Abbildungen zwischen metrischen Räumen.

Als Literatur zur deskriptiven Mengenlehre seien KURATOWSKI [Ku-T], ALEXANDROFF [Al-1956], SIERPINSKI [Si-1934] und natürlich die *Mengenlehre* von HAUSDORFF [H-M2, H-M3] genannt. Gute moderne Lehrbücher stammen von KECHRIS [Ke-DST] und MOSCHOVAKIS [M-DST].

1 Deskriptive Mengenlehre in HAUSDORFFs *Grundzügen* (Übersicht)

Die *Grundzüge der Mengenlehre* gelangen durch sukzessive Spezialisierung von den allgemeinen Mengen zu Strukturen mit zunehmendem Raumcharakter, wobei die Übergänge zwischen den Bereichen Topologie, deskriptive Mengenlehre und Maßtheorie fließend sind und keine eindeutige Trennung in die Teilgebiete möglich ist. Die Darstellung der deskriptiven Mengenlehre, die als eigenständiges Teilgebiet der Mengenlehre unter diesem Namen erst um 1930 hervortrat (siehe ALEXANDROFF-HOPF[AH-1935, S.20]), finden wir in den *Grundzügen* hauptsächlich in den Ausführungen über metrische Räume. Wir führen die Paragraphen auf, die aus heutiger Sicht zur deskriptiven Mengenlehre zu zählen sind und die im Folgenden kommentiert werden.

Achtes Kapitel. **Punktmengen in speziellen Räumen.**

§ 4. Punktmengen und Ordnungszahlen (S. 275 - 284):
Ketten von offenen und abgeschlossenen Mengen; die CANTOR-BENDIXSON-Analyse von Punktmengen; Residuen; reduzible Mengen; Zusammenhangskomponenten.

§ 7. Metrische Räume: BORELsche Mengen (S. 304 - 311):
BORELsche Mengen; eine funktionentheoretische Anwendung; Mengen irrationaler Zahlen.

§ 9. Vollständige Räume (S. 318 - 328):
Satz von CANTOR; Satz von CANTOR über perfekte Mengen; Satz von YOUNG über $\mathbf{G}_\delta$-Mengen; dyadische Mengen; CANTORmengen; BAIREscher Kategoriensatz.

Neuntes Kapitel. **Abbildungen oder Funktionen.**

§ 4. Konvergente Folgen von Funktionen (S. 384 - 390):
Konvergenzmengen; BAIREsche Klassifikation von Funktionen.

§ 5. Funktionenklassen (S. 390 - 396).

§ 6. Die Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge (S. 396 - 399).

Anhang. **Nachträge und Anmerkungen.**

- Zum achten Kapitel, § 4 (S. 460 - 462): Reduzible Mengen.
- Zum achten Kapitel, § 9 (S. 465 - 466): Die Mächtigkeit der $\mathbf{G}_{\delta\sigma\delta}$-Mengen.

2 Deskriptive Mengenlehre in den übrigen Arbeiten HAUSDORFFs (Übersicht)

Aufsätze

Die folgenden Arbeiten gehören zur deskriptiven Mengenlehre, sie werden im Band III dieser Ausgabe reproduziert und kommentiert:

[H-1916] *Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen*
[H-1919] *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung*
[H-1924] *Die Mengen* G_δ *in vollständigen Räumen*
[H-1930] *Erweiterung einer Homöomorphie*
[H-1933] *Zur Projektivität der* δs*-Funktionen*
[H-1934] *Über innere Abbildungen*
[H-1937] *Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums*

Weitere Arbeiten behandeln vorrangig andere Gebiete der HAUSDORFFschen Mathematik, enthalten jedoch auch Resultate zur deskriptiven Mengenlehre.

[H-1908] *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*
[H-1909] *Die Graduierung nach dem Endverlauf*
[H-1936] *Summen von* $\aleph_1$ *Mengen*
[H-1936S] *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz and L. Kantorovitch*
[H-1938] *Erweiterung einer stetigen Abbildung*

Bücher: Mengenlehre

In der 2. und 3. Auflage der *Grundzüge*, die vollkommen überarbeitet unter dem Titel *Mengenlehre* [H-M2, H-M3] erschienen sind, ist der Anteil der allgemeinen Mengenlehre und Topologie reduziert zugunsten einer wesentlich erweiterte Darstellung der deskriptiven Mengenlehre. Die *Mengenlehre* wird im Band III dieser Ausgabe reproduziert und kommentiert.

3 Zur Entwicklung der deskriptiven Mengenlehre bis zu den Grundzügen

GEORG CANTORs Untersuchungen [Ca-1872] über die Eindeutigkeit der Koeffizienten einer FOURIERentwicklung können als gemeinsamer Ursprung von *allgemeiner* und *deskriptiver* Mengenlehre angesehen werden: CANTOR definiert und klassifiziert „kleine“ Mengen reeller Zahlen, die für sein Eindeutigkeitsergebnis vernachlässigt werden können. Ihre Analyse mit Hilfe iterierter Ableitungen, bei denen jeweils zur Menge der Häufungspunkte übergegangen wird, führt zur Entdeckung der transfiniten Ordinalzahlen. Der Satz von CANTOR [Ca-1884], dass jede abgeschlossene Menge reeller Zahlen Vereinigung einer perfekten Menge und einer höchstens abzählbaren Menge ist, ist das klassische Beispiel für Untersuchungen der deskriptiven Mengenlehre: für eine natürliche Klasse von Punktmengen werden Strukturaussagen und feine Klassifizierungen gesucht. CANTOR glaubte, dass sich derartige Ergebnisse schließlich auf *alle* Mengen reeller Zahlen ausdehnen ließen:

> Dass dieser merkwürdige Satz eine weitere Gültigkeit auch für *nicht abgeschlossene* lineare Punktmengen und ebenso auch für alle n-dimensionalen Punktmengen hat, wird in späteren Paragraphen bewiesen werden ([Ca-1884], S. 488).

Das aber ist auf Grund späterer Erkenntnisse der deskriptiven und allgemeinen Mengenlehre nicht möglich.

Der Anfang der deskriptiven Mengenlehre als eigenständiges Teilgebiet der Mathematik kann auf den Beginn des 20. Jahrhunderts datiert werden, als die französische funktionentheoretische Schule ihre Untersuchungen auf größere, durch Fragen der Analysis motivierte Klassen von Mengen und Funktionen ausweitete. Borel (in [B-LTF, S. 46, 47] und in [B-LFR, S. 17]) definierte mit dem Borelschen Maß implizit auch die Klasse der *messbaren* Mengen (*ensembles mesurables*).

Nach Borel ist das Maß $\mu(I)$ eines reellen Intervalls $I=(a,b)$ seine Länge $b-a$; das Maß einer Mengendifferenz ist $\mu(A-B)=\mu(A)-\mu(B)$, falls $\mu(A)$ und $\mu(B)$ definiert sind und $B\subseteq A$; die entscheidende Eigenschaft ist die σ-*Additivität* des Borelschen Maßes:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(X_n)$$

für jede abzählbare Familie paarweise disjunkter Mengen X_n, deren Borelsche Maße definiert sind. Die Existenz einer solchen Maßfunktion μ ist von Borel und Lebesgue gezeigt worden.[1]

Die so messbaren Mengen sind also diejenigen, die sich aus reellen Intervallen durch die Operationen der Mengendifferenz und der abzählbaren Vereinigung erzeugen lassen. Lebesgue [Lb-1905] bezeichnete die messbaren Mengen in Anerkennung Borels als *ensembles mesurables B* (B-messbare Mengen). Dieser Begriff wurde in den Anfangsjahren der deskriptiven Mengenlehre häufig benutzt (siehe z.B. Alexandroff [Al-1916], Luzin [Lu-1917], Suslin [Su-1917]). Später nannte man sie, besonders in der russischen Schule der deskriptiven Mengenlehre, auch *B-Mengen*, wohl weil die Definition unabhängig von der Existenz eines Maßes ist. Die heute übliche Bezeichnung Borel*sche Menge* schließlich wurde von Hausdorff eingeführt [H-GZ, S. 305]. Zuvor hatte Schoenflies [Shf-1913, S. 350] diesen Begriff für die $\mathbf{G}_\delta$-Mengen benutzt, also für die abzählbaren Schnitte offener Mengen.

In engem Zusammenhang mit den Borelschen Mengen steht die von Baire [Ba-1899] eingeführte Hierarchie reeller Funktionen, die ebenfalls

[1] Das Borelsche Maß kann als Einschränkung des Lebesgueschen Maßes definiert werden; siehe Hausdorff [H-GZ, Kap.10, §3].

durch abzählbare Operationen erzeugt wird. Jede stetige Funktion ist BAIREsch, und jede Funktion, die punktweiser Limes einer abzählbaren Folge BAIREscher Funktionen ist, ist wiederum BAIREsch. Die BAIREsche Klasse 0 besteht aus allen stetigen Funktionen. Die BAIREsche Hierarchie wird durch Rekursion auf den Ordinalzahlen definiert: eine Funktion f ist von der BAIREschen Klasse $\alpha \geq 1$, wenn α minimal ist, so dass sich f als punktweiser Limes $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ darstellen lässt, wobei jedes f_n von kleinerer Klasse als α ist.

Das Hauptwerk der frühen deskriptiven Mengenlehre ist HENRI LEBESGUEs Arbeit *Sur les fonctions représentables analytiquement* [Lb-1905]. ALEXANDROFF und HOPF schreiben in ihrer *Topologie*:

> Die deskriptive Mengenlehre wurde (anschließend an BAIREs Arbeiten über unstetige Funktionen) von LEBESGUE 1905 begründet. Ihre weitere Entwicklung beginnt elf Jahre später mit dem Mächtigkeitssatz für die Borelschen Mengen, ... [AH-1935, S. 20].

LEBESGUE klassifiziert die BORELschen Mengen im Wesentlichen nach der Zahl der infinitären Operationen, die zu ihrer Definition benötigt werden. Die transfinite, durch abzählbare Ordinalzahlen indizierte BORELsche Hierarchie verhält sich analog zur BAIREschen. Auf jeder Stufe der Hierarchien gibt es neue Objekte, die in keiner früheren Stufe liegen. LEBESGUE stellt fest, dass das System der BAIREschen Funktionen und BORELschen Mengen unter „analytischen“ Konstruktionen abgeschlossen ist, also für die Belange der Analysis ausreicht. Dieses spiegelt sich im Begriff der *fonctions représentables analytiquement* wider. Der LEBESGUEsche Aufsatz kennzeichnet den wissenschaftlichen Stand, auf dem HAUSDORFF seine Arbeit in der deskriptiven Mengenlehre aufnimmt.

Der Beginn der deskriptiven Mengenlehre wurde auch beeinflusst von der mathematischen Grundlagenkrise zu Beginn des 20. Jahrhunderts. In den berühmten *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* zwischen BAIRE, BOREL, HADAMARD und LEBESGUE [BBHL] wird gegen ZERMELOs Beweis [Zer-1904] des Wohlordnungssatzes unter der Annahme des Auswahlaxioms argumentiert. In der Diskussion wird im Gegensatz zu ZERMELOs Auswahlen *ad libitum*[2] gefordert, dass mathematische Funktionen *définies* (definiert) oder zumindest *décrites* (beschrieben) sein müssten, wobei die BAIREschen Funktionen und auch die BORELschen Mengen diesem aus heutiger Sicht unscharfen Kriterium genügten. Aus dem Wort *décrit* ist der Begriff *deskriptive Mengenlehre* hervorgegangen.

---

[2] Dieser Terminus wird in BORELs direkter Kritik [B-1905] an ZERMELOs Methode benutzt.

Hausdorff kannte die Grundlagendiskussion und entschied sich deutlich für den allgemeinen Mengenbegriff Cantors, von dem er erwartete, dass er durch Zermelos Formalismus gegen die Antinomien abgesichert werden könnte:

> Hierher gehört auch die vielumstrittene Frage, unter welchen Bedingungen ein mathematisches Objekt, etwa eine Zahl, eine Menge, eine Funktion als „definiert" anzusehen sei (die Frage nach der Definition einer „Definition"). Wir folgen der freien Auffassung Cantors [...] und verlangen nicht, daß die logische Disjunktion, ob ein Ding einer Menge angehört oder nicht, mit unseren aktuellen Mitteln wirklich entschieden werden könne. [...] Dieser Mengenbegriff und dieser (Dirichletsche) Funktionenbegriff bindet sich weder an „Kriterien, die nur eine endliche Anzahl von Versuchen erfordern", noch an „analytische Darstellungen" u. dgl. [H-GZ, S. 450].

Hausdorff stellt allgemeine wie deskriptive Mengenlehre unter dem Kriterium ihres mathematischen Gehalts dar. Durch die Beschränkung auf Mengen, die auf abzählbare Weise aus einfachen Komponenten erzeugbar sind, erzielt die deskriptive Mengenlehre wesentlich stärkere Strukturaussagen. Wie Cantor strebt Hausdorff aber Verallgemeinerungen auf alle Mengen an – das belegen seine gelegentlichen Anmerkungen zur Cantorschen Kontinuumhypothese.

4 Hausdorffs Einführung von Borelmengen in metrischen Räumen

Hausdorff wendet in Kap. 8, § 7 der *Grundzüge* den in Kap. 1, § 10 entwickelten Begriffsapparat zur Bildung von Mengensystemen auf metrische Räume an. Für eine Mengenfamilie $\mathbf{X}$ bezeichne $\mathbf{X}_\sigma$ bzw. $\mathbf{X}_\delta$ die Gesamtheit aller abzählbaren Vereinigungen bzw. abzählbaren Durchschnitte von Elementen von $\mathbf{X}$. Wenn wie üblich $\mathbf{F}$ bzw. $\mathbf{G}$ die Klassen der abgeschlossenen bzw. offenen Mengen eines gegebenen Raums sind, so stehen $\mathbf{F}_\sigma$ and $\mathbf{G}_\delta$ für die Klassen aller abzählbaren Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen bzw. aller abzählbaren Schnitte von offenen Mengen. Die Notation kann auf naheliegende Weise fortgesetzt werden: $\mathbf{F}_{\sigma\delta} = (\mathbf{F}_\sigma)_\delta$ ist z.B. die Klasse aller abzählbaren Schnitte von $\mathbf{F}_\sigma$-Mengen. Diese von Hausdorff eingeführten Schreibweisen werden auch heute noch zur Bezeichnung kleiner Borelscher Komplexitäten eingesetzt (siehe [KM]). Sie entsprechen den aus der mathematischen Logik stammenden Klassifizierungen $\mathbf{\Sigma}_n^0$ bzw. $\mathbf{\Pi}_n^0$ für endliche Indizes $n \geq 1$: $\mathbf{F}_\sigma = \mathbf{\Sigma}_1^0$, $\mathbf{F}_{\sigma\delta} = \mathbf{\Pi}_2^0$, $\mathbf{F}_{\sigma\delta\sigma} = \mathbf{\Sigma}_3^0$, …, und $\mathbf{G}_\delta = \mathbf{\Pi}_1^0$, $\mathbf{G}_{\delta\sigma} = \mathbf{\Sigma}_2^0$, $\mathbf{G}_{\delta\sigma\delta} = \mathbf{\Pi}_3^0$, … (siehe [Ke-DST]).

HAUSDORFF weist darauf hin, dass man mit Hilfe transfiniter Rekursion zu Klassen $\mathbf{F}_{(\sigma\delta)}$ und $\mathbf{G}_{(\delta\sigma)}$ gelangt, die sowohl bzgl. abzählbarer Vereinigungen wie abzählbarer Durchschnitte abgeschlossen sind. In metrischen Räumen fallen beide Klassen zusammen, sie bilden die von den offenen oder abgeschlossenen Mengen erzeugte *σ-Algebra*.

In Kap. 8, § 7 der *Grundzüge* bezeichnet HAUSDORFF Mengen der Klassen $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{F}_\sigma, \mathbf{G}_\delta, \mathbf{F}_{\sigma\delta}, \mathbf{G}_{\delta\sigma}, \ldots$ als BORELsche Mengen, aber es bleibt zunächst unklar, ob HAUSDORFF über die endlich indizierten $\mathbf{F}$- und $\mathbf{G}$-Klassen hinaus alle Elemente der σ-Algebra $\mathbf{F}_{(\sigma\delta)}$ als BORELsche Mengen bezeichnen möchte. Erst die Untersuchung der Parallelen zwischen BORELschen Mengen und BAIREschen Funktionen in Kap. 9 gibt Aufschluss. Im Anhang, S. 466 bezieht sich HAUSDORFF eindeutig auf die gesamte σ-Algebra:

> …alle Borelschen Mengen …, d.h. die aus den Gebieten oder abgeschlossenen Mengen durch Summen- und Durchschnittsbildung über Folgen hervorgehen.

HAUSDORFFs Begriff der BORELschen Mengen, der sich historisch durchgesetzt hat, erweitert SCHOENFLIES' Gebrauch, der sich nur auf $\mathbf{G}_\delta$-Mengen bezog [Shf-1913, S.350].

HAUSDORFF weist – vom Standpunkt der allgemeinen Mengenlehre – deutlich darauf hin, dass die Familie der BORELschen Mengen von (wesentlich) kleinerer Kardinalität als die Potenzmenge der reellen Zahlen ist, und er bezweifelt, dass man auf diesem Wege zum Beweis der CANTORschen Kontinuumhypothese gelangen kann:

> Im euklidischen Raume bilden also die Mengen, die aus abgeschlossenen Mengen oder Gebieten durch Summen- oder Durchschnittsbildung von Folgen entstehen, immer noch einen verschwindend kleinen Teil des Systems aller Punktmengen ([H-GZ, S. 305, siehe auch S. 321]).

Die weiteren Ausführungen in Kap. 8, § 7 beziehen sich auf Mengen G aus der allgemeinen Theorie metrischer Räume, der Theorie komplexer Funktionen und der Theorie der Irrationalzahlen von der Gestalt:

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n, \quad G_n = \bigcup_{a \in A} U_{an},$$

wobei jedes U_{an} offene Umgebung von a vom Radius $\rho_{an} > 0$ ist. G ist als abzählbarer Durchschnitt offener Mengen jedenfalls eine $\mathbf{G}_\delta$-Menge, das Komplement F eine $\mathbf{F}_\sigma$-Menge.

Wenn A abgeschlossen ist und für alle a, n der Radius $\rho_{an} = \frac{1}{n}$ gewählt wird, so ist $A = G$. Also ist jede abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes $\mathbf{G}_\delta$, und jede offene Menge $\mathbf{F}_\sigma$. Dies ist eine nützliche notwendige Bedingung für die *Metrisierbarkeit* eines topologischen Raumes.[3]

Die Durchschnitte G der Umgebungen G_n können komplizierter werden, wenn die Radien der Kugeln U_{an} von den Kugelmittelpunkten a abhängen. Eine GOURSATsche Reihe der Gestalt

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{c_p}{z - a_p}, \ \ c_p \in \mathbb{C} - \{0\}, \ a_p \in \mathbb{C}$$

mit hinreichend schnell abnehmenden Beträgen $|c_p|$ konvergiert für $z \in \mathbb{C}$ und natürliche Zahlen n, wenn z von a_p jeweils einen genügend großen Abstand $|z - a_p| \geq \frac{1}{n}\,\rho_{a_p}$ besitzt, wobei die Radien ρ_{a_p} hinsichtlich verschiedener Abschätzungen geeignet gewählt werden. Wenn man mit $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ und den Radien $\frac{1}{n}\,\rho_{a_p}$ die Umgebungen und ihren Durchschnitt wie oben ansetzt, so konvergiert die Reihe auf der $\mathbf{F}_\sigma$-Menge F und ist im Inneren von F holomorph. HAUSDORFF deutet an [H-GZ, S. 308 und S. 274], wie man diese Konstruktion im Beweis des WEIERSTRASSschen Existenzsatzes einsetzen kann, der besagt, dass jedes offene Gebiet Holomorphiegebiet einer komplex differenzierbaren Funktion ist. Um zu verhindern, dass sich die GOURSATsche Funktion über den Rand des Gebietes holomorph fortsetzen lässt, sind allerdings weitere Vorkehrungen zu treffen (siehe [Re-1991, Kap.5, § 2]).

Selbst bei einer dichten Ausgangsmenge A kann das Komplement F der Schnitte der Umgebungen ebenfalls dicht in dem metrischen Raum liegen. HAUSDORFF betrachtet als A die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen reellen Zahlen sowie einen natürlichen Exponenten $k > 1$. Der rationalen Zahl $a = \frac{p}{q}$, p und q teilerfremd mit positivem Nenner, ordnet HAUSDORFF die Radien $\rho_{an} = \frac{1}{nq^k}$ zu. Dann liegt x genau dann im Durchschnitt G der damit bestimmten Umgebungen, wenn x im Sinne der Theorie der irrationalen

[3] Man betrachte beispielsweise die GANDY–HARRINGTON-*Topologie*, die von allen parameterfrei definierbaren Σ^1_1-Mengen reeller Zahlen erzeugt wird (siehe [HKL-1990]). Eine Π^1_1-Menge X, die nicht $\mathbf{\Sigma}^1_1$ ist, ist GANDY–HARRINGTON-abgeschlossen. Die Menge X kann aber nicht $\mathbf{G}_\delta$ im Sinne der GANDY-HARRINGTON-Topologie sein, denn dann wäre X eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge in der gewöhnlichen Topologie. Also ist die GANDY-HARRINGTON-Topologie nicht metrisierbar, obwohl sie einige Gemeinsamkeiten mit vollständig metrisierbaren Topologien besitzt.

Zahlen eine *Approximation der Ordnung* k durch rationale Zahlen zulässt (siehe [HW-1958, § 11.4]). Die Frage nach der Gestalt des Komplements F führt auf die Frage nach der Existenz „schlecht“ approximierbarer reeller Zahlen. HAUSDORFF gibt einen Beweis des Satzes von LIOUVILLE, dass für eine irrationale algebraische Zahl x vom Grad k eine positive Konstante M_x existiert, so dass für rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ wie oben gilt:

$$|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{M_x q^k}.$$

Da die algebraischen Zahlen vom Grad k dicht in $\mathbb{R}$ liegen, ist das Komplement F dicht in $\mathbb{R}$.

Zur Kardinalität von F schreibt HAUSDORFF: „... allerdings ist hier nicht sicher, dass F_σ $[\ = F\,]$ eine so hohe Mächtigkeit wie zuvor erlangt.“ Der Beweis von Satz 188 aus [HW-1958] zeigt aber, dass eine irrationale Zahl, in deren Kettenbruchentwicklung alle Nenner beschränkt sind, ebenfalls den Satz von LIOUVILLE für den Exponenten $k = 2$ erfüllt. Die Menge derartiger Kettenbrüche hat die Kardinalität des Kontinuums, die maximal mögliche Kardinalität wird also erreicht.

Die hier von HAUSDORFF konstruierten BORELschen Mengen zeigen exemplarisch, wie $\mathbf{G}_\delta$ - und $\mathbf{F}_\sigma$ -Mengen in verschiedenen Bereichen auf natürliche Weise auftreten. Inzwischen ist für zahlreiche mathematische Begriffe nachgewiesen worden, dass sie in adäquaten metrischen Räumen $\mathbf{G}_\delta$ - oder $\mathbf{F}_\sigma$ -Mengen definieren [Ke-DST].

5 Kardinalitäten von BORELmengen

Der bedeutsamste Einzelbeitrag HAUSDORFFs zur deskriptiven Mengenlehre ist die Bestimmung der Kardinalitäten von BORELmengen:

> Jede Borelsche Menge ist entweder endlich oder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums [H-1916, S.433]. [4]

Dieses Ergebnis wird im Band III dieser Ausgabe eingehend gewürdigt. Die Vorgeschichte des Satzes von HAUSDORFF spiegelt sich in den *Grundzügen* wider: CANTOR [Ca-1884, Theorem D und §19], YOUNG [Y-1903] und HAUSDORFF selbst haben Spezialfälle der Kardinalitätsaussage für $\mathbf{F}$ -, $\mathbf{G}_\delta$ - bzw. $\mathbf{G}_{\delta\sigma\delta}$ -Mengen bewiesen.

Da jede Mächtigkeit unterhalb der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des reellen Kontinuums durch eine Teilmenge der reellen Zahlen repräsentiert werden kann, ist die

[4] P. ALEXANDROFF [Al-1916] zeigte diesen Satz unabhängig und mit einer anderen Beweismethode.

CANTORsche Kontinuumhypothese äquivalent zu der Aussage: Jede Menge reeller Zahlen ist endlich, abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums. Ein Ansatz CANTORs zum Beweis der Hypothese bestand darin, diese Aussage für möglichst große Klassen von Mengen reeller Zahlen zu zeigen. CANTOR gelang, wie schon in 3. erwähnt, der Nachweis für *abgeschlossene* Punktmengen.

CANTOR definierte die *Ableitung* A_β einer Menge A reeller Zahlen als die Menge der Limespunkte von A (die Bezeichnungen stammen aus Kap. 7, § 3 der *Grundzüge*). Durch transfinite Iteration dieser Operation gelangte er nach höchstens abzählbar vielen Schritten zum *Kern* A_k der gegebenen Menge; aus der Darstellung von A als Summe von A_k und den entlang der Iteration ausgeschiedenen Punkten erhielt CANTOR die Kardinalitätsaussage für abgeschlossenes A. Die meisten Elemente dieses Beweisgangs finden sich bei HAUSDORFF im Kap. 8, § 4. Es ist bemerkenswert, dass HAUSDORFF die Beweisteile nicht zusammenfügt, sondern in Kap. 8, § 9 den schnelleren, aber weniger informativen Weg über *Verdichtungspunkte* nach LINDELÖF [Lin-1905] wählt.

HAUSDORFFs Diskussion der Rolle der Ordinalzahlen in der deskriptiven Mengenlehre zu Beginn von Kap. 8, § 4 kann als Verteidigung der CANTORschen Ordinalzahlen gegenüber einer „Tendenz“ zur Eliminierung der Ordinalzahlen verstanden werden. HAUSDORFF folgt der Tendenz teilweise, auch weil sie für Kardinalitätsbestimmungen der höheren BORELschen Klassen angemessen ist, aber er betont: „[Die Ordinalzahlen] ermöglichen eine feinere Analyse der Struktur gegebener Mengen durch Unterscheidung von Häufungspunkten verschieden hoher Ordnung“ [H-GZ, S. 275]. Anzumerken ist, dass die moderne deskriptive Mengenlehre höherer Punktklassen ohne Ordinalzahlen überhaupt nicht denkbar wäre.

HAUSDORFF zeigt die Sätze von CANTOR und YOUNG gemeinsam. Der Kern der zu untersuchenden abgeschlossenen bzw. $\mathbf{G}_\delta$ - Menge X wird jeweils als Menge der in X enthaltenen Verdichtungspunkte gewonnen; dieser ist leer oder X hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des reellen Kontinuums; die Differenz zwischen Menge und Kern ist höchstens abzählbar; daraus folgt der Kardinalitätssatz. Zum Nachweis der Kardinalität $\mathfrak{c}$ bei nichtverschwindendem Kern benutzt HAUSDORFF ein dyadisches System ineinander geschachtelter Intervalle oder Kugeln. Der Rest des § 9 diskutiert derartige Systeme in größerer Allgemeinheit.

Während der Fertigstellung der *Grundzüge* muss HAUSDORFF dann sein eigenes Teilergebnis über Kardinalitäten BORELscher Mengen gefunden habe; es findet sich als Nachtrag zu § 9 im Anhang:

In einem vollständigen Raume mit abzählbarer dichter Teilmenge ist eine Menge $G_{\delta\sigma\delta}$, wenn sie unabzählbar ist, von der Mächtigkeit des Kontinuums [H-GZ, S.465].

Die Grundkonstruktion von HAUSDORFF's Beweis sei im Folgenden in moderner Notation skizziert.[5] Für eine überabzählbaren $\mathbf{G}_{\delta\sigma\delta}$ -Menge

$$X = \bigcap_{a\in\omega} \bigcup_{i\in\omega} \bigcap_{n\in\omega} X_{ain} \qquad \text{(alle } X_{ain} \text{ offene reelle Intervalle)}$$

bildet HAUSDORFF eine nicht-leere perfekte Teilmenge $U \subseteq X$ der Form $U = \bigcap_n \bigcup_{s\in 2^n} U_s$, wobei $\{U_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ ein dyadisches System abgeschlossener Intervalle mit folgenden Eigenschaften ist:

(i) für $s \in 2^n$ ist: $U_{s^\wedge i} \subseteq U_s$, $U_{s^\wedge 0} \cap U_{s^\wedge 1} = \emptyset$, und das Intervall U_s hat Länge $\leq n^{-1}$; dies sichert, dass U homöomorph zum CANTORschen Diskontinuum $\mathbb{C}$ ist;

(ii) für $s \in 2^a$ ist $U_s \cap X \cap X_{0i_0} \cap X_{1i_1} \cap ... \cap X_{ai_a}$ überabzählbar, wobei die Zahlen i_0, i_1, i_2, ... simultan mit den Intervallen U_s induktiv definiert werden, und wobei $X_{ai} = \bigcap_{n\in\omega} X_{ain}$;

(iii) für $s \in 2^n$ ist $U_s \subseteq \bigcap_{a\leq n,\, \nu\leq n} X_{ai_a\nu}$; dies impliziert $U \subseteq X$.

Zur rekursiven Definition eines derartigen Systems benutzt HAUSDORFF, dass jede überabzählbare Menge reeller Zahlen mindestens zwei Kondensationspunkte besitzt.

Im Anschluss an den Beweis des $\mathbf{G}_{\delta\sigma\delta}$ -Satzes stellt HAUSDORFF fest: „Der Versuch scheint nicht aussichtslos, das gleiche für alle Borelschen Mengen zu beweisen“ [H-GZ, S. 466]. Tatsächlich ist der Beweis eine Vorform des allgemeinen Beweises von HAUSDORFF [H-1916]: dort führt HAUSDORFF die „Entfaltung“ (ii) entlang der Pfade eines fundierten Baumes durch, der die Konstruktion einer gegebenen BORELmenge beschreibt; die Eigenschaft (iii) wird nur für die Endpunkte des Baumes gefordert.

Im Anschluss an die Kardinalitätssätze beschreibt HAUSDORFF nochmals den Unterschied zwischen der Kontinuumhypothese für BORELsche Mengen und der für allgemeine Mengen:

[5] Einige relevante Bezeichnungen: $\omega = \{0, 1, 2, ...\}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen; 2^n sei die Menge der dyadischen Folgen der Länge n , wobei aus dem Zusammenhang hervorgeht, ob stattdessen die Exponentiation natürlicher Zahlen gemeint ist; $2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n$ sei die Menge der endlichen dyadischen Folgen, die insbesondere die leere Folge Λ enthält.

> Wüßte man für *alle* Mengen eines euklidischen Raumes, was man nach IV [den Kardinalitätssätzen] von den abgeschlossenen Mengen F oder den Mengen G_δ weiß, daß sie nämlich endlich, abzählbar oder von der Mächtigkeit $\aleph$ sind, so wäre $\aleph$ die nächste Mächtigkeit über $\aleph_0$ und damit die Kontinuumfrage im Sinne der Cantorschen Vermutung $\aleph = \aleph_1$ entschieden. Um aber einzusehen, wie weit man noch von diesem Ziel entfernt ist, genügt es sich zu erinnern, daß das System der Mengen F oder G_δ nur einen verschwindend kleinen Teil des Systems aller Punktmengen bildet [H-GZ, S. 321].

6 Reduzible Mengen und Differenzenketten

Hausdorff hat sich in seinen Arbeiten seit 1914 immer wieder mit *reduziblen* Mengen beschäftigt, die Ursprünge der Theorie finden sich in [H-GZ, Kap. 8, § 4]. Hausdorff beweist nach Cantor und Lindelöf [Lin-1905], dass in separablen Räumen jede wohlgeordnete echt aufsteigende oder absteigende Folge offener oder abgeschlossener Mengen höchstens abzählbar ist. Dies motiviert folgende allgemeine Konstruktion: Es sei jeder Menge X eines Raums eine in X relativ abgeschlossene Teilmenge $\varphi(X) \subseteq X$ zugeordnet. Dann definiere man durch transfinite Rekursion für eine Menge A die Folge $A_0 = A$, $A_\eta = \bigcap_{\xi<\eta} \varphi(A_\xi)$. Dies ist eine absteigende Folge relativ abgeschlossener Teilmengen von A, die nach höchstens abzählbar vielen Schritten konstant wird: der *Kern* von A (oder auch die *letzte Menge*) ist definiert als $A_\infty = A_\eta$, wobei $\eta < \omega_1$ minimal ist mit der Eigenschaft $A_\eta = A_{\eta+1}$. Der Kern von A ist relativ abgeschlossen in A und erfüllt offensichtlich $\varphi(A_\infty) = A_\infty$. Dieses Schema *iterierter Ableitungen* wird in der deskriptiven Mengenlehre häufig angewendet, teilweise in abgewandelter Form.[6]

Hausdorff führt in Kap. 8, § 4 drei Anwendungen iterierter Ableitungen aus: Cantor–Bendixson–*Ableitungen, Residuen* sowie eine topologische Konstruktion, deren Kern eine Zusammenhangskomponente einer gegebenen Menge ergibt. Auf die letzte Anwendung sei hier nicht eingegangen.

Cantor nennt die Menge $\varphi(X) = X_h$ aller Limespunkte von X die (erste) *Kohärenz* von X. Diese ist relativ abgeschlossen in X, das relative Komplement $X - X_h$ ist die Menge aller isolierten Punkte von X und wird als *Adhärenz* bezeichnet. Die Adhärenz ist relativ offen in X und höchstens

[6] Beispielweise verzichtet Kechris [Ke-DST, 34.D] auf die relative Abgeschlossenheit von $\varphi(X)$ in X, die Folge der A_ξ erreicht ihre letzte Menge dann eventuell erst für einen überabzählbaren Index.

abzählbar. Die *letzte Kohärenz* X_∞ ist dann die größte insichdichte Teilmenge von X.

Für abgeschlossene Mengen A ist A_h die CANTOR–BENDIXSON–*Ableitung* von A. Der Kern A_∞ heißt *perfekter Kern*. Dieser ist die größte perfekte Teilmenge von A, die Differenz $A - A_\infty$ ist höchstens abzählbar. Eine abgeschlossene Menge A ist genau dann abzählbar, wenn $A_\infty = 0$.

HAUSDORFF entwickelt eine Variante dieser Analyse: $\psi(X) = \overline{X} \setminus X$ ist die Menge aller Limespunkte von X die *nicht* zu X gehören. Diese Operation ist nicht monoton. Die zweifache Anwendung $\varphi(A) = \psi(\psi(A))$ ist jedoch monoton und $\varphi(X)$ ist relativ abgeschlossen in X, da $\varphi(A) = A \cap \overline{\psi(A)}$. HAUSDORFF [H-GZ, Kap. 8, § 4] nennt $\varphi(A)$ das (erste) *Residuum* von A. Die Eigenschaft $\varphi(X) = X$ ist äquivalent dazu, dass die Menge X co-dicht in ihrem Abschluss $\overline{X}$ ist.

Nach dem allgemeinen Ableitungsschema kann ein *letztes Residuum* A_∞ von A konstruiert werden mit $\varphi(A_\infty) = A_\infty$. Die Menge A heißt nach HAUSDORFF *reduzibel*, wenn ihr letztes Residuum die leere Menge ist[7]. Ähnlich wie bei den CANTOR–BENDIXSON–Ableitungen erlauben Mengen mit leerem Kern verschiedene Charakterisierungen. Die folgenden drei Familien von Mengen stimmen in geeigneten Räumen überein (siehe [H-GZ], Kap.8, § 4 und die Anmerkungen S. 460 – 462):

(1°) Reduzible Mengen;

(2°) Mengen der Gestalt $A = \bigcup_{2\alpha<\xi} (X_{2\alpha} \setminus X_{2\alpha+1})$, wobei $\{X_\gamma\}_{\gamma<\xi}$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen von Länge $\xi < \omega_1$ ist; KURATOWSKI [Ku-T] bezeichnet A dann als *auflösbar durch eine Differenzenkette der Länge* ξ;

(3°) $\mathbf{\Delta}^0_2$-Mengen, d.h. solche, die zugleich $\mathbf{F}_\sigma$ als auch $\mathbf{G}_\delta$ sind.

$(1°) \subseteq (2°)$ gilt in jedem separablen Raum, $(2°) \subseteq (3°)$ gilt in jedem Raum, in dem alle offenen Mengen $\mathbf{F}_\sigma$ sind, und $(3°) \subseteq (1°)$ gilt in jedem Raum, in dem jede abgeschlossene Menge $A \neq \emptyset$ in der Relativtopologie von A von zweiter Kategorie ist, d.h. nicht als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen darstellbar ist. Die genannten Bedingungen sind in vollständigen separablen, oder kurz *polnischen* Räumen erfüllt.

HAUSDORFFs Beweis von $(1°) \subseteq (2°)$ basiert auf folgender Beobachtung: $A = \varphi(A) \cup (\overline{A} \setminus \overline{\psi(A)})$ entsteht durch Vereinigung von $\varphi(A)$ mit der Differenz zweier abgeschlossener Mengen. Wenn A reduzibel ist, so ist das

[7]Die Namensgebung erinnert an CANTORs Begriff der *reductiblen* Menge für diejenigen A, deren perfekter Kern leer ist [Ca-1883, S. 575]; siehe die Fußnote [H-GZ, S. 281].

letzte Residuum leer, und A kann als abzählbare Vereinigung von Differenzen abgeschlossener Mengen dargestellt werden.

$(2°) \subseteq (3°)$ ist offensichtlich für höchstens abzählbare Kettenlängen ξ.

$(3°) \subseteq (1°)$ lässt sich überraschend einfach beweisen. Wenn A eine $\mathbf{\Delta}^0_2$-Menge ist, so ist auch das letzte Residuum $\mathbf{\Delta}^0_2$, weil es abgeschlossen in A ist. Es genügt also zu zeigen, dass jede $\mathbf{\Delta}^0_2$-Menge X mit der Eigenschaft $X = \varphi(X)$ leer ist. Betrachte den Abschluss $F = \overline{X}$. Da $X = \varphi(X)$, ist die Komplementärmenge $Y = F \setminus X$ dicht in F. Dann sind X und Y dichte $\mathbf{G}_\delta$-Teilmengen der Menge F, die abgeschlossen in einem polnischen Raum ist. Dieses ist aber nur möglich, wenn F und somit X leer sind.

Hausdorffs Technik der Differenzenketten wurde in den klassischen Untersuchungen von Borelmengen zwischen 1920 und 1940 häufig eingesetzt. Kuratowski [Ku-T, § 13.2] betont, dass viele wichtige Eigenschaften von $\mathbf{\Delta}^0_2$-Mengen, also solchen Mengen, die zugleich $\mathbf{F}_\sigma$ und $\mathbf{G}_\delta$ sind, aus ihrer Darstellbarkeit als Differenzenketten folgen[8]. Diese Anwendungen werden zusammen mit Aufzeichnungen aus dem Nachlass Hausdorffs in Band III der Ausgabe kommentiert.

7 Abbildungen zwischen metrischen Räumen

In Kap. 9, § 4 bis § 6 der *Grundzüge* stellt Hausdorff die Grundlagen der Theorie der stetigen und Baireschen Funktionen zwischen metrischen Räumen dar. Die Ergebnisse gehen nicht über Baire, Borel und Lebesgue hinaus, interessant aber ist die Darstellung der *Funktionen*theorie vom Standpunkt einer *Mengen*theorie. Diese Sichtweise entsprach nicht dem zur Zeit der Grundzüge verbreiteten Ansatz, hat sich aber letztlich durchgesetzt: wir sprechen von deskriptiver *Mengen*lehre und nicht mehr von deskriptiver *Funktionen*theorie.

Hausdorff definiert und klassifiziert verschiedene aus Funktionen definierte Borelmengen: die Menge der Stetigkeitspunkte einer Funktion ist von der Klasse $\mathbf{G}_\delta$, die komplementäre Menge der Unstetigkeitspunkte von der Klasse $\mathbf{F}_\sigma$. Eine reelle Funktion kann an allen rationalen Stellen unstetig und an allen irrationalen Stellen stetig sein – das Umgekehrte ist aber nach Sätzen über die Borelschen Klassen $\mathbf{F}_\sigma$ und $\mathbf{G}_\delta$ nicht möglich.

Für Funktionenfolgen definiert Hausdorff den gewöhnlichen Begriff der gleichmäßigen Konvergenz sowie eine schwächere *uniforme Konvergenz*, die anscheinend keine weitere Verwendung gefunden hat. Hieraus leiten sich

[8] Kuratowski [Ku-T] verweist wegen der Differenzenketten auf Hausdorffs *Mengenlehre* [H-M3], aber die Methode und der Begriff *Differenzenkette* stammen bereits aus den *Grundzügen* [H-GZ].

die Punkte gleichmäßiger bzw. uniformer Konvergenz ab, die wiederum $\mathbf{G}_\delta$-Mengen bilden. Mit den eingeführten Begriffen werden anschließend die üblichen Kriterien für die Stetigkeit von Limesfunktionen formuliert.

Die BAIREschen Funktionenklassen werden von HAUSDORFF als Φ_0, Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ bezeichnet und durch die im dritten Abschnitt vorgestellte Rekursion definiert. HAUSDORFF zieht in der weiteren Darstellung ein Klassifikationsschema für reellwertige Funktionen vor, das er in Kap. 1, § 11 eingeführt hatte. Die Funktion f gehört zur Klasse (M, N), wenn die Urbilder von offenen Intervallen (u, ∞) in M und die Urbilder von abgeschlossenen Intervallen $[u, \infty)$ in N liegen. In dieser Schreibweise entsprechen die BAIREschen Klassen Φ_0, Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ den HAUSDORFFschen Klassen $(\mathbf{G}, \mathbf{F}), (\mathbf{F}_\sigma, \mathbf{G}_\delta)$, $(\mathbf{G}_{\delta\sigma}, \mathbf{F}_{\sigma\delta}), \ldots$. Die BAIREschen Funktionen sind genau die BOREL*messbaren*, das sind diejenigen der Klasse $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$, wobei $\mathfrak{B}$ die Klasse aller BORELmengen in $\mathfrak{X}$ ist.

Als Anwendung definiert HAUSDORFF etwa zu einer beliebigen reellwertigen Funktion f ihre *obere rechte Ableitung*

$$\limsup_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;;$$

entsprechend gibt es untere linke und gemischte Ableitungen. Die rechte obere Ableitung einer stetigen Funktion ist dann von der Klasse $(\mathbf{G}_{\delta\sigma}, \mathbf{G}_\delta)$.

Eine weitere Klassifikation dieser Art nimmt HAUSDORFF in § 6 vor: für eine Folge reeller stetiger Funktionen bilden die Konvergenzpunkte eine $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$-Menge. Geeignet konstruierte Funktionenfolgen zeigen dann, dass sich die Komplexität im Allgemeinen nicht auf $\mathbf{F}_\sigma$ oder $\mathbf{G}_\delta$ herabdrücken lässt.

HAUSDORFF erweiterte die Ergebnisse von §§ 5, 6 beträchtlich in seinen späteren Untersuchungen über BAIREsche Funktionen [H-1919] und vor allem in der *Mengenlehre* [H-M2, §§ 41–44].

HAUSDORFFs mengentheoretische Veröffentlichungen

[H-1908] F. HAUSDORFF, Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen, *Math. Ann.* **65** (1908), S. 435–505.

[H-1909] F. HAUSDORFF, Die Graduierung nach dem Endverlauf, *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Classe* **31** (1909), S. 295–334.

[H-1916] F. HAUSDORFF, Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen, *Math. Ann.* **77** (1916), S. 430–437.

[H-1919] F. HAUSDORFF, Über halbstetige Functionen und deren Verallgemeinerung, *Math. Zeitschrift* **5** (1919), S. 292–309.

[H-1924] F. HAUSDORFF, Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen, *Fund. Math.* **6** (1924), S. 146–148.

[H-1930] F. HAUSDORFF, Erweiterung einer Homöomorphie, *Fund. Math.* **16** (1930), S. 353–360.

[H-1933] F. HAUSDORFF, Zur Projektivität der δs-Funktionen, *Fund. Math.* **20** (1933), S. 100–104.

[H-1934] F. HAUSDORFF, Über innere Abbildungen, *Fund. Math.* **23** (1934), S. 279–291.

[H-1936] F. HAUSDORFF, Summen von $\aleph_1$ Mengen, *Fund. Math.* **26** (1936), S. 241–255.

[H-1936S] F. HAUSDORFF, Über zwei Sätze von G. Fichtenholz and L. Kantorovitch, *Studia Math.* **6** (1936), S. 18–19.

[H-1937] F. HAUSDORFF, Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums, *Fund. Math.* **29** (1937), S. 151–158.

[H-1938] F. HAUSDORFF, Erweiterung einer stetigen Abbildung, *Fund. Math.* **30** (1938), S. 40–47.

[H-GZ] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig, 1914; Nachdruck New York, 1949, 1965, 1978.

[H-M2] F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, zweite, neubearbeitete Aufl., W. de Gruyter & Co., Berlin, 1927.

[H-M3] F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, dritte Aufl., W. de Gruyter & Co., Berlin, 1935.

Literatur

[Al-1916] P. Alexandroff, Sur la puissance des ensembles mesurables B, *C. R. Acad. Sci. Paris* **162** (1916), S. 323–325.

[Al-1956] P. Alexandroff, *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[AH-1935] P. Alexandroff, H. Hopf, *Topologie*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935.

[Ba-1899] R. Baire, Sur les fonctions de variables reelles, *Ann. Mat. Pura Appl., Serie IIIa* **3**, (1899), S. 1–122.

[BBHL] R. Baire, É. Borel, J. Hadamard, H. Lebesgue, Cinq lettres sur la théorie des ensembles, *Bull. Soc. Math. France* **33** (1905), S. 261–273.

[Ba-1909] R. Baire, Sur la représentation des fonctions discontinues, *Acta Math.* **32** (1909), S. 97–176.

[B-LTF] É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, 1898.

[B-LFR] É. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Paris, 1905.

[B-1905] É. Borel, Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles, *Math. Ann.* **60** (1905), S. 194–195.

[Ca-1872] G. Cantor, Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math. Ann.* **5** (1872), S. 123–132.

[Ca-1883] G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. Nr.5, *Math. Ann.* **21** (1883), S. 545–591.

[Ca-1884] G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. Nr.6, *Math. Ann.* **23** (1884), S. 453–488.

[HW-1958] G. H. Hardy, E. M. Wright, *Einführung in die Zahlentheorie*, R. Ouldenburg, München, 1958.

[HKL-1990] L. A. Harrington, A. S. Kechris, A. Louveau, A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), S. 903–928.

[Ke-DST] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer-Verlag, 1994.

[Ku-T] K. Kuratowski, *Topology, vol. I, New edition, revised and augmented,* Academic Press, New York und London, 1966. (Zuerst veröffentlicht 1933.)

[KM] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set Theory, with an Introduction to Descriptive Set Theory,* North Holland, 1976.

[Lb-1905] H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Ser. 6)* **1** (1905), S. 139–216.

[Lin-1905] E. Lindelöf, Remarques sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles, *Acta Math.* **29** (1905), S. 183–190.

[Lu-1917] N. Lusin, Sur la classification de M. Baire, *C. R. Acad. Sci. Paris* **164** (1917), S. 91–94.

[M-DST] Y. Moschovakis, *Descriptive Set Theory,* North-Holland, Amsterdam, 1980.

[Re-1991] R. Remmert, *Funktionentheorie 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Shf-1913] A. Schoenflies, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1913.

[Si-1934] W. Sierpiński, *Introduction to General Topology*, The University of Toronto Press, Toronto, 1934.

[Su-1917] M. Souslin, Sur une définition des ensembles mésurables B sans nombres transfinis, *C. R. Acad. Sci. Paris* **164** (1917), S. 88–91.

[Y-1903] W. H. Young, Zur Lehre der nicht abgeschlossenen Punktmengen, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse* **55** (1903), S. 287–293.

[Zer-1904] E. Zermelo, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.* **59** (1904), S. 514–516.