Köln, Oktober 2002

Köln, Oktober 2002

Vortrag: Die Newton-Hodge-Zerlegung für zerfallende Gruppen, nach Kottwitz.

Erster Teil: Gruppenth.

Bezeichnungen: $\mathcal{O}$ = vollst. DBR, $F$, $\pi$, $k$.

$G$ = zerf. reduktive Gr. $/\mathcal{O}$

$A$ = max. zerf. Torus

$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(A) = \{ B = A \cdot U$, Borel's $\}$

$K = G(\mathcal{O})$.

Iwasawazerl. bzgl. $B \in \mathfrak{B}$: $G(F) = K \cdot X_* \cdot U(F)$

Für $g \in G(F) \rightsquigarrow r_B(g) \in X_*$ „Retraktion"

Lemma (HC, Arthur): Seien $B_1 = A \cdot U_1$ und $B_2 = A \cdot U_2$ benachbarte Borel's, d.h. $\exists!$ Wurzel $\alpha$, die positiv für $B_1$ und negativ für $B_2$. Dann gilt

$$r_{B_2}(g) - r_{B_1}(g) = j \cdot \alpha^\vee \quad \text{mit } j = j(g) \geq 0.$$

Weiter ist $j = 0$ gdw $g = k \pi^{\nu} u$, mit $u \in U_1 \cap U_2(F)$.

Beweis: Reduziere auf Fall, wo $G = SL_2$, $B_1$ = obere, $B_2$ = untere.

Sei z.B. $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $r_{B_2}(g) = 0$.

Falls $x \in \mathcal{O} \Rightarrow g \in K$ und $r_{B_1}(g) = 0$. Sonst

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K \cdot A(F) \cdot U_1(F).$$

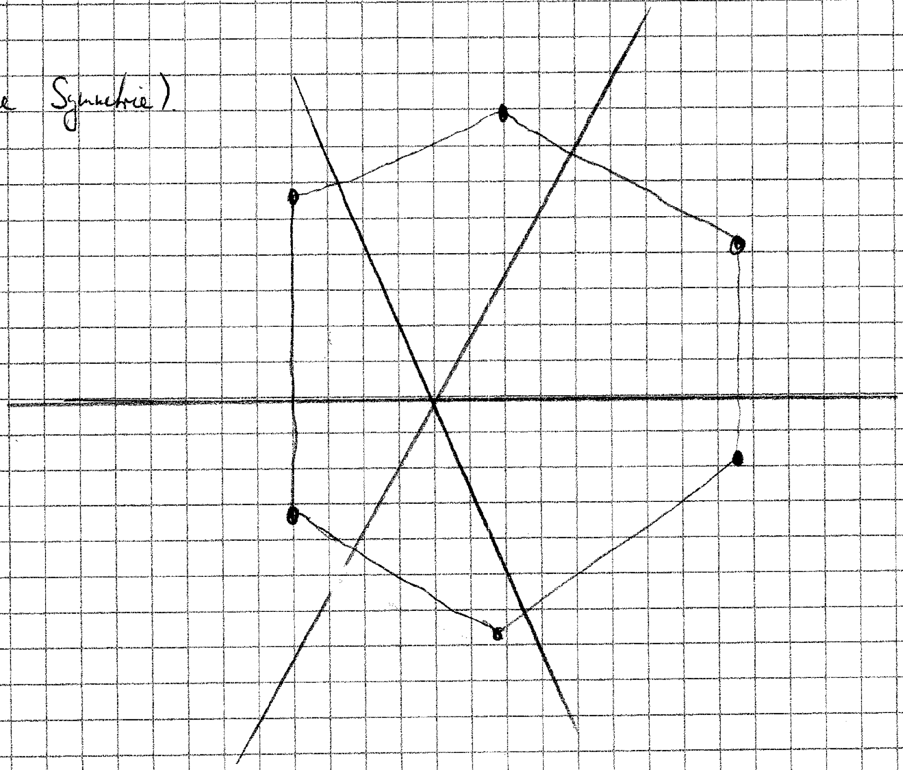
Somit ist $r_{B_1}(g) = \mathrm{val}(x)\alpha^\vee < 0$ und

$$r_{B_2}(g) - r_{B_1}(g) = -\mathrm{val}(x) \cdot \alpha^\vee \quad //$$

Für $\mu, \nu \in X_*$ schreibe $\mu \overset{B}{\leq} \nu$, falls $\nu - \mu$ nichtneg. LK aus Cowurzeln, die positiv bzgl. $B$. Aus obigem Lemma folgt:

$$r_B(g) \overset{B}{\leq} r_{B'}(g) \overset{B}{\leq} r_{\bar{B}}(g), \quad \forall B' \in \mathcal{B}(A).$$

Bild (ohne Symmetrie).



~~Le~~ Sei 2 jetzt $M \supset A$ Leviuntergruppe (hier prop., die $B$ enthält).

Sei $X_M = X_* / \langle \text{Cowurzeln in } M \rangle_{\mathbb{Z}}$

( Für $G = GL_n$, $M = M_{(n_1, \dots, n_r)}$ ist

$$X_M = \mathbb{Z}^r, \text{ via } (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{I_1} x_i, \dots, \sum_{I_r} x_i\right). )$$

<u>Lemma 2</u>: Sei $g \in G(F)$. Dann $g \in K.M(F)$ gdw.

$$r_{B_1}(g) \equiv r_{B_2}(g) \bmod X_M \quad , \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}.$$

<u>Beweis</u>: $\Rightarrow$: Sei $B \in \mathcal{B}$, dann ist $B \cap M$ Borel von $M$

und $r_B(g) = r_{B \cap M}(m)$, falls $g = k.m \in K.M(F)$.

Also $r_{B_1}(g) - r_{B_2}(g) =$ LK von Cowurzeln für $M$ ✓

$\Leftarrow$: nur im Fall $G = SL_2$, $M = A$. Aber aus

$r_B(g) = r_{\overline{B}}(g)$ folgt wg. Lemma 1, daß $g = k.\pi^r$, $k \in K$.

Im allg. Fall Induktion über Länge der minimalen

Galerie zwischen $B$ und $\overline{B}$. //

<u>Erinnern an Resultat aus BT</u> ( Satake transf. ): Sei $B \in \mathcal{B}$,

$\mu \in X_{dom}$ ( bzgl. $B$). <u>Cartanzerlegung</u>

$$G(F) = K. X_{dom}. K \qquad \text{( erklär für } GL_n \text{)}$$

<u>Satz</u>: Sei $\mu \in X_{dom}$, sei $g \in K.\mu(\pi).K$. Dann $\forall B' \in \mathcal{B}$,

$$r_{B'}(g) \overset{B}{\leq} \mu.$$

<u>Corollar</u>: Falls $r_B(g) = \mu$, so $g \in K.A(F)$

<u>Beweis</u>: In obr Teil, aus Lemma 1 folgt $r_{B'}(g) = \mu$, $\forall B'$

Mit Lemma 2 ( für $M = A$) folgt die Beh. //

<u>Variante für psgps</u>: Sei $B = A.U \subset P = M.N$ psgp

Für $\mu, \nu \in X_M$ schreibe $\mu \overset{P}{\leq} \nu$, falls $\nu - \mu$ Bild in $X_M$ von Cowurzeln in $N$ (oder $U$, das ist egal).

<u>Proposition:</u> Sei $\mu \in X_{dom}$ und sei $g \in K.\mu(\pi)K$. Dann ist

$$r_{B'}(g) \overset{P}{\leq} \mu, \qquad \forall B' \in \mathcal{B}$$

Falls Gleichheit für $B$ (als Elte in $X_M$), so $g \in K.M(F)$. In diesem Fall, falls $g = k.m$, so ist $m \in K_M.\mu(\pi).K_M$. Hier ist $K_M = M(\mathcal{O})$.

<u>Beweis:</u> Erste Auss. folgt aus B-T. Falls $r_B(g) = \mu$, so $r_{B'}(g) = \mu$ in $X_M$, $\forall B'$ und somit $g \in K.M(F)$ nach <u>Lemma 2</u>. Schreibe $g = k.m$. Sei $m \in K_M.\nu(\pi).K_M$, wobei $\nu \in X_*$ dominant bzgl. $B \cap M$. Dann liegen $\mu, \nu$ im selben W-Orbit. Weil $\mu, \nu$ beide $B \cap M$-dominant, ist $\mu - \nu = \underline{\underline{~~\text{...}~~}}$ LK von Cowurzeln $\alpha^\vee$ in $N$. Aber andererseits ist $\mu = r_B(g) = r_{B \cap M}(m) \overset{B \cap M}{\leq} \nu$ in $X_M$. Somit ist $\mu = \nu$ //.

(Beweis so wie Lemmas 4.9/4.10 in Kota).

Zweiter Teil: Isokristalle.

Sei $F/\mathbb{Q}_p$ endl. Erw. Sei $L = \widehat{F^{un}}$. Erhalte

$\mathcal{O}_L$, $\pi$, $\sigma =$ relativer Frobenius.

Definition: Ein $\sigma$-$L$-Raum (oder $F$-Isokristall) ist Paar

$(V, \varphi)$ aus endl.-dim. $L$-VR $V$ und $\sigma$-lin. bijektive $\varphi: V \to V$

Erkläre: • Halbeinfache $F$-lineare Kat.

• Einf. Objekte

• slopes.

Lemma: Sei $(V, \varphi)$ mit allen slopes $> 0$.

(i) $\forall v \in V$ konvergiert $\varphi^n(v) \to 0$

(ii) Sei $\Lambda$ ein $\mathcal{O}_L$-Gitter in $V$ mit $\varphi(\Lambda) \subset \Lambda$. Falls

$v - \varphi(v) \in \Lambda$, so $v \in \Lambda$.

Beweis: (i) Sei $j > 0$, s.d. $j \cdot r \in \mathbb{Z}$, $\forall$ slope $r$. Dann

ex. Basis von $V$, s.d. $\varphi^j = \operatorname{diag}(\pi^{s_1}, \ldots, \pi^{s_n})$. $s_i > 0$

Dann ist klar, daß $\varphi^{jn} v' \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $\forall v' \in V$.

Jetzt nehme für $v'$ die Vektoren $v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{j-1}(v)$ ✓

(ii) Wg. (i) ex. $\psi = 1 + \varphi + \varphi^2 + \ldots$. Also ist

$1 - \varphi$ bijektiver additiver Homo. Wende ihn an auf $(1-\varphi)(v) \in \Lambda$ //

Sei jetzt $G$, $A$ über $F$. Sei $B = A\mathcal{U} \in \mathcal{B}(A)$ und

$P = M.N \supset B$. Sei

$$A_P = \text{zushg. Zentrum von } M.$$

$$\mathfrak{a}_P = X_*(A_P)_{\mathbb{R}}$$

$$\mathfrak{a}_P^+ = \{x \in \mathfrak{a}_P;\ \langle \alpha, x\rangle > 0 \quad \forall \text{ Wurzel } \alpha \text{ von } A_P \text{ in } N$$

Dann

$$\mathfrak{a}_P \simeq X_{M\,\mathbb{R}}$$

Sei $X_M^+ = \mathfrak{a}_P^+ \cap X_M$.

[Für $G = GL_n$, $M = M_{(n_1, \dots, n_r)}$ ist $A_P = (\lambda_1 \mathrm{id}_{n_1}, \dots, \lambda_r \mathrm{id}_{n_r})$

und $\mathfrak{a}_P^+ = \{x_1 > \dots > x_r\}$.]

Definiere Kottwitz-homo.

$$w_M : M(L) \longrightarrow X_M \qquad \text{durch}$$

$$w_M(m) = \text{Bild von } r_{B,M}(m) \text{ unter } X_* \longrightarrow X_M.$$

Sei jetzt $\mu \in X_{dom}$. Sei $b \in M(L)$ basic mit

$w_M(b) \in X_M^+$. Sei

$$X_G(b,\mu) = \{x \in G(L)/G(\mathcal{O}_L);\ x^{-1} b\, \sigma(x) \in G(\mathcal{O}_L).\mu(\pi).G(\mathcal{O}_L)\}$$

affine DL-Varietät für $G$. Entspr. $X_M(b,\mu)$ und

$$X_M(b,\mu) \hookrightarrow X_G(b,\mu).$$

Satz: (i) Falls $X_G(b,\mu) \neq \emptyset$, so $w_M(b) \overset{P}{\leq} \mu$ (als Elt von $X_M$).

(ii) Falls $w_M(b) = \mu$ (in $X_M$), so ist $X_M(b,\mu) = X_G(b,\mu)$.

Erklärung für $G = GL_n$: Sei $V = F^n \otimes_F L$, $\varphi = b\sigma$

$X_G(b,\mu) = \{ \Lambda \ O_L\text{-Gitter}, \ \mathrm{inv}(\Lambda, \varphi(\Lambda)) = \mu \}$.

Dabei ist $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$, und $\mathrm{slope}(\varphi) = (\nu_1^{n_1}, \dots, \nu_r^{n_r})$

mit $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_r$. Dabei ist $w_M(b) = (n_1\nu_1, \dots, n_r\nu_r)$
$\in (\mathbb{Z}^r)_+$.

- Nun ist $w_M(b) \overset{P}{\leq} \mu$ gdw. alle Partialsumme für $n_1, n_1+n_2, \dots, n_1+\dots+n_r$ erfüllt Ungleichungen. Aber da aus Konvexitätsgründen erfüllt alle Partialsumme für $1, 2, \dots, n$ diese Ungleichungen: dies ist die Mazur'sche Ungleichung.

- Gleichheit = Partialsumme gleich für $n_1, n_1+n_2, \dots, n_1+\dots+n_r$.

Nun ist $X_M(b,\mu) = \{ \Lambda = \Lambda_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_r, \ \Lambda_i = V_i \cap \Lambda;$
$\mathrm{inv}(\Lambda_i, \varphi_i(\Lambda_i)) = \mu_i \}$.

die Aussage ist die Hodge-Newton-Zerlegung

Zum Beweis des Satzes benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma: Seien $b, \mu$ wie oben, Sei $b \in M(O_L)\,\mu(\pi)\,M(O_L)$.

Sei $\varphi : N_L \to N_L$ gleich $n \mapsto b \cdot \sigma(n) \cdot b^{-1}$. Falls

$n \in N(L)$ mit $n^{-1} \cdot \varphi(n) \in N(\mathcal{O}_L)$, so $n \in N(\mathcal{O}_L)$.

Beweis: Weil $\mu$ dominant, ist $\mu(\pi) N(\mathcal{O}_L) \mu(\pi)^{-1} \subset N(\mathcal{O}_L)$. Also auch $\varphi(N(\mathcal{O}_L)) \subset N(\mathcal{O}_L)$. Weil $w_M(b) \in X_M^+$, sind alle slopes von $\varphi$ auf Lie $N$ positiv. Falls $N$ abelsch, so folgt die Beh. aus obigem Lemma. Sonst Induktion über Normalreihe //

Beweis des Satzes: (i) Sei $x \in X_G(b, \mu)$. Schreibe $x = m n k$ mit $m \in M(L), n \in N(L)$, $k \in K_L = G(\mathcal{O}_L)$. Sei

$$m_1 = m^{-1} b \sigma(m) \in M(L), \quad n_1 = n^{-1} m_1 \sigma(n) m_1^{-1} \in N(L).$$

Da

$$n_1 \cdot m_1 = n^{-1} \cdot m^{-1} b \sigma(m) \sigma(n) \in K_L \, \mu(\pi) K_L.$$

Somit

$$w_M(b) = w_M(m_1) = \tau_{B \cap M}(m_1) = \text{Bild von } \tau_B(n_1 m_1) \text{ in } X_M.$$

Nach Prop. 5 (letztes Mal) folgt

$$w_M(b) = \tau_B(n_1 m_1) \overset{P}{\leq} \mu.$$

(ii) Jetzt herrsche Gleichheit. Prop $\Rightarrow$ $n_1 m_1 \in K_L \cdot M(L)$.

Aber dann ist $n_1 \in K_L \cdot M(L)$. Schreibe

$$n_1 = k_2 \cdot m_2$$

Dann ist $n_1 m_2^{-1} \in P(\mathcal{O}_L)$ und somit $n_1 \in N(\mathcal{O}_L)$, $m_2 \in M(\mathcal{O}_L)$

Prop. voriges Mal angewendet auf $n_1 \cdot m_1 \in K_L \cdot M(L)$ gibt

$$m_1 \in M(O_L) \cdot \mu(t) \cdot M(O_L).$$

Nun ist $n n_1 \cdot m_1 = n m_1 \cdot \sigma(n) m_1^{-1}(\ldots)$ , $b' = n^{-1} b \sigma(n)$

und $m_1 = m^{-1} \cdot b\, \sigma(m)$ erfüllt selbe Vor. wie $b$. Somit aus

letztem Lemma $n \in N(O_L)$. Somit $x = m \cdot (n k) \in M(L) \cdot K_L$

Folglich ist $x$ Bild von $m \in M(L)/M(O_L)$ und

$$m^{-1} b\, \sigma(m) = m_1 \in M(O_L) \cdot \mu(\pi) \cdot M(O_L)$$

Dear Bob,

I have now given my talk about your ms. in our seminar and have the following additional comments.

— In 2.3. I suggest to spell out for further use that $j = 0$ iff $g = k.\varpi^r \cdot u$ with $u \in (U_1 \cap U_2)(F)$.

— At the beginning of 2.4. it might be useful (although pedantic) to point out that $X_A = X_*(A)$.

— In 3.1. it is confusing to say that "our" $F$ is now a finite extension of $\mathbf{Q}_p$ since you are applying the previous results to $L$. I suggest that you say that you are changing notation.

— In the proof of Lemma 3.5. it might be useful to spell out the relation between $w_M(b)$ and the slopes of $\Phi$.

— In the proof of Thm. 3.6 it is $x$ instead of $g$ (occurs 4 times).

I really had fun reading the ms!

Meiki