Bonn, Mai 03

Vortrag: Lokale Modelle von Shimuravarietäten und Matrixgleichungen

Spectabilis, lieber Günther,
sehr geehrte Damen und Herren,

zunächst möchte ich mich recht herzlich für die Einladung zu diesem Vortrag bedanken. Eine Einladung nach Bonn ist immer ehrenvoll — und zwar in jeder Hinsicht. Nichtsdestoweniger habe ich zunächst einen Schreck gekriegt, als ich zu diesem Vortrag aufgefordert wurde, weil ich befürchtete, daß man von mir eine Laudatio auf Herrn Harder erwartete, was mich bei weitem überfordert hätte. Zu meiner Erleichterung stellte sich aber dann heraus, daß ich einen ganz normalen mathematischen Vortrag halten soll. Das gefällt mir auch deshalb besser, weil ich auf diese Weise ganz direkt meinen Dank ausdrücken kann für die Mathematikbegeisterung, mit der Du, Günther, viele von uns angesteckt hast. Und diese Begeisterung belegen wir am besten, indem wir uns mit Mathematik beschäftigen.

Übrigens sehe ich, Günther, daß Du — wohl wegen der Feierlichkeit der heutigen Veranstaltung — Dein übliches Schreibtablett nicht mitgebracht hast. Ich weiß nicht, ob ich damit Deine Aufmerksamkeit gewinne oder gerade nicht, weil ich nie herausbekommen habe, ob die Rechnungen, die Du während der Vorträge machst, etwas mit dem Thema des Vortragenden zu tun haben oder Deinen eigenen Fragestellungen gelten.

Jetzt aber zum Thema meines Vortrags. Gegenstand der Algebraischen Geometrie sind die gemeinsamen Nullstellenmengen von Polynomen, auch Schemata genannt. Ein äußerst interessantes Schema trifft man bereits im zweiten Semester.

Nilpotente Varietät

$$\{ X \in M_n ; \ X^n = 0 \}.$$

$$n = 2 : \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 x_3 & x_2(x_1+x_4) \\ x_3(x_1+x_4) & x_4^2 + x_2 x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

nicht reduziert, d.h. gibt Polynome in $x_1, \ldots, x_4$, die auf nilpot. Matrizen verschwinden, aber nicht im Ideal liegen, das von Eintr. erzeugt wird.

Satz (Kostant, Donkin, Mehta, van der Kallen, ...): Sei

$$N_n = \{ X \in M_n ; \ \mathrm{char}_X(T) = T^n \}.$$

Die Varietät N_n ist irreduzibel und reduziert, normal mit rat. Sing.

Beachte: $\mathrm{char}_X(T) = T^n \Rightarrow X^n = 0$, also $N_n(k) = \{\text{nilpot. Matrizen}\}$

Vermutung (Pappas, Rapoport): Sei $e < n$. Betr.

$$N_{n,e} = \{ X \in M_n ; \ \mathrm{char}_X(T) = T^n, \ X^e = 0 \}.$$

Dann ist $N_{n,e}$ irreduzibel und reduziert, normal mit rat. Sing.

Satz (Weyman): Vermutung richtig falls entweder

(i) $\mathrm{char}\, k = 0$

(ii) $e = 2$.

Es sind solche Matrizengleichungen, die im Titel meines Vortrages angesprochen werden. Jetzt zum ersten Teil meines Titels.

Schemata nach den sie definierenden Polynome zu ordnen ist schlecht.

<u>Besser</u>: durch numerische Invarianten (z.B. Anzahl der Vektorfelder, oder Bettizahlen etc.) ⇝ abelsche Var., CY-Mf, K3-Flächen.

Das ist der primäre level. <u>Secundärer level</u>: Modulvarietäten von Obj. des primären levels. Einfachstes Objekt des secundären levels: Shimura-var

<u>Für diesen Vortrag reicht</u>: Sh.-varietät repräs. Funktor

$$\mathcal{M}_E : (Sch/E) \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Iso-klassen von abelschen Var. mit} \\ \text{Zusatzdaten wie Polaris., Endo's, Niveaustr.} \end{array} \right\}.$$

Dabei hängt $\mathcal{M}_E$ ab von alg. Gruppe $G/\mathbb{Q}$ und E Zahlkörper, der kanon. assoziiert (<u>Reflexkörper</u>).

<u>Pb-stellung</u>: Sei $\mathfrak{p}$ Primideal in E mit Restkl.-char p. Gesucht von jetzt ab fest.

Modell M über Spec $\mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}$ von $\mathcal{M}_E \times_{\operatorname{Spec} E} \operatorname{Spec} E_\mathfrak{p}$.

<u>Wollen</u>: M flach, mit milden Sing., projektiv, falls $\mathcal{M}_E$ projektiv,

wollen Beschreibung von $M \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_E} \operatorname{Spec} k_\mathfrak{p}$.

<u>Naive Idee:</u> Erweitere in „off. Weise" den Funktor $\mathcal{M}_E$ in

$$\mathcal{M} : (Sch / O_{E_\wp}) \longrightarrow (\text{—''—})$$

Hoffe, daß obige Forderungen erfüllt. Funktioniert oft (in „unverzw. Fall")

<u>Fall des Modulraums elliptischer Kurven</u> ($G = GL_2$, $E = \mathbb{Q}$).

Fix. $n \geq 3$, $(n, p) = 1$. Betr.

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(S) = \{ (A, \alpha) ;\ A/S \text{ ellipt. Kurve},\ \alpha : A_n \simeq (\mathbb{Z}/n)^2 \}$$

darstellb. durch quasiproj. glatte Kurve / $\mathbb{Q}$.

„Selbes" Modulpb. definiert quasiproj. Var. $\mathcal{M} / \mathbb{Z}_p$.

<u>Satz</u> (klassisch): $\mathcal{M}$ <u>ist glatt über</u> Spec $\mathbb{Z}_p$.

<u>Beweis:</u> Diagramm

fix. Basis von $H_1^{DR}(A)$

lokales Modell („lineares Modell")

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathcal{M} & & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

- π ist PFB unter GL_2.
- $\varphi\big((A, \alpha, \eta : \mathcal{O}_S^2 \xrightarrow{\sim} H_1^{DR}(A/S))\big) \mapsto [\eta^{-1}(\omega_{A/S}) \subset \mathcal{O}_S^2]$.

Aus Sätzen von Serre-Tate, Groth.-Messing folgt: φ glatt (infinit. Kriterium) //

Variante: $\Gamma_0(p)$ - Modulpb.

Bek.

$$\mathcal{M}(S) = \{ (A_0 \xrightarrow{\varphi} A_1, \alpha) ; \ \varphi \text{ Isog. von Grad } p \}$$

Satz: $\mathcal{M}$ ist flach über Spec $\mathbb{Z}_p$, mit semistabiler Reduktion.

Beweis: Jetzt Diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{M}^{\boxminus} \arrow[dl, "\pi"', "\text{PFB}"] \arrow[dr, "\varphi_1", "\text{glatt}"'] & \\ \mathcal{M} & & M \end{tikzcd}$$

M (lokales Modell): $\mathbb{Q}_p^2$ mit Basis e_1, e_2. Gitter

$$\Lambda_0 = \text{span}\{e_1, e_2\} \quad , \quad \Lambda_1 = \text{span}\{p^{-1}e_1, e_2\} .$$

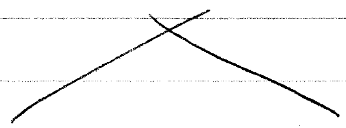
$$\Lambda_0 \longrightarrow \Lambda_1 \xrightarrow{p} \Lambda_0 .$$

$M(S)$ = Isom.-kl. von kommut. Diagr.

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_{0\,S} & \longrightarrow & \Lambda_{1\,S} & \longrightarrow & \Lambda_{0\,S} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathcal{F}_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathcal{F}_0 \end{array}$$

wobei $\mathcal{F}_i$, lok. auf S, direkter Summ. frei von Rang 1.

Bild von $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$:



eigtl. 2 Methoden (eine lokal, eine global)

Gleichungen: ~ Diagramm

$$\begin{tikzcd} & M^{\natural} \arrow[dl, "pr"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N = \{(X,Y) \in (\mathbb{A}^1)^2 ;\ X \cdot Y = p\} \end{tikzcd}$$

PFB   glatt.

Fix. Basis von $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$

Im weiteren diskutiere ich andere Fälle

1. G = unitäre Gruppe der Signatur (r,s) mit $r+s=n$, zu quadr. Erw. $E/\mathbb{Q}$

wo p unverzw. in q.

Führt auf folg. lokales Modell: Betr. $\mathbb{Q}_p^n$ mit $e_1, \ldots, e_n$, sei

$$\Lambda_i = \operatorname{span}\{p^{-1}e_1, \ldots, p^{-1}e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n\}$$

$$\Lambda_0 \to \Lambda_1 \to \ldots \to \Lambda_{n-1} \xrightarrow{p} \Lambda_0$$

Fix. $I = \{i_0 < i_1 < \ldots < i_{m-1}\} \subset \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

$$M_I(S) = \begin{array}{ccccccccc} \Lambda_{i_0,S} & \to & \Lambda_{i_1,S} & \to & \ldots & \to & \Lambda_{i_{m-1},S} & \to & \Lambda_{i_0,S} \\ \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\ \mathcal{F}_{i_0} & \to & \mathcal{F}_{i_1} & \to & \ldots & \to & \mathcal{F}_{i_{m-1}} & \to & \mathcal{F}_{i_0} \end{array}$$

wobei $\mathcal{F}_i$ lokal auf S direkter Summand frei vom Rg r.

$\Rightarrow M_I \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p} \operatorname{Spec} \mathbb{Q}_p = \operatorname{Grass}_{r,s}$ (dualer symm. Raum).

glatt (Faltings, u.a.)

Wieder Diagramm

$$\begin{tikzcd} & M_I^{\natural} \arrow[dl, "pr"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M_I & & N \end{tikzcd}$$

$N = \{(X_0,\dots,X_{m-1})\in (M_r)^m;\ X_0\cdots X_{m-1} = X_1X_2\cdots = p\cdot I\}.$

Äußerst schwierige Matrixgleichg für $p=0$. Für $m=2$ haben

<u>Satz</u> (Strickland, u.a.): <u>Bet.</u>

$$\bar N = \{(X,Y)\in (M_r)^2;\ XY = YX = 0\}.$$

<u>Dann ist</u> $\bar N$ <u>reduziert</u> (und viel mehr).

<u>Theorem</u> (Görtz): M_I <u>ist flach über Spec $\mathbb{Z}_p$. Die spezielle Faser ist reduziert und alle ihre irreduz. Komp. sind normal mit rat. Sing.</u>

<u>Stichwort</u>: Frob.-splitting von Schubertvar. in affiner Flaggenvar. Ausnutzen der Pumpe durch ob. Satz von Strickland.

2. <u>Symplektische Gruppe</u> GSp_n <u>mit</u> $n = 2r$

Jetzt haben sympl. Form auf $\mathbb{Q}_p^n$. Wählen adapt. Basis $e_1,\dots,e_n$; dann Λ_0 selbstdual und $\Lambda_i \leftrightarrow \Lambda_{n-i}$. Sei I mit „$-I=I$“.

Für lokales Modell stelle Dualitätsford. an $\mathcal{F}$. : $\mathcal{F}_i \leftrightarrow \mathcal{F}_{n-i}$, z.B. $\mathcal{F}_0$ Lagrange Unterraum

Satz (Görtz): Sei J sympl. Form der Größe $2s$. Betr.

$$\bar{N} = \{ X \in M_{2s} ; X^{ad} \cdot X = X \cdot X^{ad} = 0 \}$$

Dann ist $\bar{N}$ reduziert (und viel mehr).

Theorem (Görtz): Genau wie vorher.

Corollar (Kottwitz, Chai-Norman): Betr.

$$\bar{N} = \{ (X,Y) \in M_s^2 ; {}^tX = X, {}^tY = Y, X \cdot Y = 0 \}.$$

Dann ist $\bar{N}$ reduziert.

3. Verzweigte Fälle: hier muß naive Idee modifiziert werden, weil naives lokale Modell nicht flach i.a.

a) Unitäre Gruppe zu (r,s), falls p verzweigt in $E/\mathbb{Q}$:

Falls $|r-s| \geq 2$, so naives Modell nicht flach. Sei $\varpi \in O_{E_\wp}$ Uniform. mit $\varpi^2 = p$. In char p ist ϖ nilpotenter Operator der Nilpotenzstufe 2 für dessen Normalform es noch viele Mögl. gibt. Man möchte zusätzl. Bedingung an Obj. von $\mathcal{M}(S)$ stellen, die zu abgeschl. Unterschema führt, das flach ist. Für $I = \{0\}$ bzw. $I = \{\frac{n}{2}\}$

führt dies auf folgende Frage.

<u>Vermutung</u> (Pappas): <u>Sei</u> $r \leq m$. <u>Betr.</u>

$$\bar{N} = \{ X \in M_{2m} \; ; \; \mathrm{char}_X(T) = T^{2m}, \; X^2 = 0, \; \Lambda^{r+1} X = 0, \; X^{ad} = X \}$$

(dabei ad = Adj. bzgl. symm. oder alt. Form }.

<u>Dann ist $\bar{N}$ reduziert.</u> Ohne Adj.-bed.: Strickland. (viel von Weyman bemerkt)

nicht mehr normal! Für allg. Indexmengen I noch komplex. Fragen.

b) $G = R_{F/\mathbb{Q}} U$, $U \simeq E/F$ <u>wobei</u> E/F <u>unverzw. über</u> p,

<u>Signatur</u> $(r_1, s_1), \ldots, (r_e, s_e)$.

Naive Idee funktioniert nicht, falls $\max |r_i - r_j| \geq 2$. Falls ≤ 1

führt auf Vermutung am Anfang meines Vortrages.

<u>Schlußbemerkung</u>: Identische Matrixgleich. wurde von Faltings in völlig

anderem Zshg. gefunden. Beziehung unklar.