Paris, Juin 2001

Exposé : Réciproques à l'inégalité de Mazur

0. • Remercier pour l'invitation

• Raynaud ?

avec Kottwitz. • 2 niveaux : le premier explique le titre

• Se restreindre à GL_n, mais marche plus généralement.

1^er niveau

F = ext. finie de $\mathbb{Q}_p$

L = complété de F^{un}

$\sigma \in Aut(L/F)$ Frobenius relatif.

O_F, O_L entiers, $\pi \in O_F$ uniformisante.

isocristal : une paire (N, Φ), $\Phi : N \to N$ σ-linéaire bijectif.

forment une catégorie. Classification à isomorphisme près :

pentes de Newton : $\{\text{isocristaux de dim. } n\}/\simeq \longrightarrow (\mathbb{Q}^n)_+$, $(N, \Phi) \mapsto \nu(N, \Phi)$.

Ici $(\mathbb{Q}^n)_+ = \{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Q}^n ; \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n\}$.

Cette application est injective et on peut caractériser son image.

Soit maintenant (N, Φ) un isocristal de dimension n. Soit M un O_L-réseau dans M (cristal, mais $\Phi M \not\subset M$ est permis).

On y associe les <u>pentes de Hodge</u>,

$$\mu(M) = \mathrm{inv}\,(M, \Phi(M)) \in (\mathbb{Z}^n)_+ .$$

<u>Caractérisé par</u> : pour $R >> 0$, $M/\pi^R \cdot \Phi(M) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} O_L/(\pi^{k_i})$,

où $\underline{k} = \mu(M) + R \cdot \mathbb{1}$ (<u>diviseurs élémentaires</u>)

Sur $(\mathbb{Q}^n)_+$ on a l'ordre partiel donné par $\nu \leq \nu' \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\nu_1 \leq \nu_1'$, $\nu_1 + \nu_2 \leq \nu_1' + \nu_2'$, ..., $\nu_1 + \dots + \nu_n = \nu_1' + \dots + \nu_n'$.

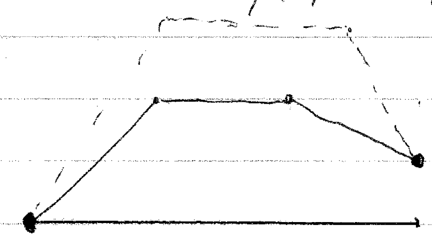
<u>Inégalité de Mazur</u> : $\mu(M) \geq \nu(N, \Phi)$.

<u>Présentation graphique</u> : $\nu \in (\mathbb{Q}^n)_+ \mapsto$ fct. <u>convexe</u> (sic !)

<u>Polygone de Newton / de Hodge</u>

f_ν sur $[0, n]$, extension affine-linéaire de $f_\nu(i) = \nu_1 + \dots + \nu_i$.

Alors : $f_{\mu(M)} \geq f_{\nu(N)}$ avec égalité en $x = n$



Théorème 1: Soit (N, Φ) un isocristal de dimension n. Soit $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$ avec $\mu \geq \nu(N,\Phi)$. Alors $\exists$ M dans N avec $\mu(M) = \mu$.

2 manières de voir ce théorème: 1° thm d'existence, 2° L'inégalité de Mazur est le seul fait d'algèbre linéaire concernant les cristaux.

A la fin de l'exposé je vais commenter la démonstration.

2ème niveau

Soit $\dim N = n$ et soit $e_1, \dots, e_n$ une base. Soit

$M_0 = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ et $K_0 = \mathrm{Stab}(M_0)$. Alors

$$\{\text{réseaux dans } N\} \simeq G(L)/K_0 . \qquad G = GL_n .$$

Interprét. sophistique de inv = composé de

$$G(L)/K_0 \times G(L)/K_0 \to G(L)\backslash (G(L)/K_0 \times G(L)/K_0) = K_0 \backslash G(L)/K_0 = (\mathbb{Z}^n)_+ .$$

décomp. de Cartan.

Plus généralement soit pour $0 \le i \le n-1$,

$$M_i = \mathrm{span}\{\pi^{-1}e_1, \dots, \pi^{-1}e_i, e_{i+1}, \dots, e_n\}.$$

Pour $\emptyset \ne I \subset \{0, \dots, n-1\}$ soit $K_I = \mathrm{Stab}\{M_i \,;\, i \in I\}$.

(parahorique, analogue de parabolique). Pour $I = \{0, \dots, n-1\}$, $K_I = \mathbb{I}$

Iwahori $\begin{pmatrix} \mathcal{O}^\times & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \\ \pi\mathcal{O} & & \mathcal{O}^\times \end{pmatrix}$.

On a

$$\left\{ \begin{matrix} \text{chaines de réseaux périodiques} \\ \text{de type } I \end{matrix} \right\} \simeq G(L)/K_I$$

(analogue de var. de drapeaux incomplets), et

$$K_I \backslash G(L)/K_I = \tilde{W}_I \backslash \hat{W}/\tilde{W}_I \quad ;$$

ici $\hat{W} = \mathbb{Z}^n \rtimes S_n$ groupe de Weyl affine étendu et

$\hat{W}_I$ = sous-gpe parabolique corresp. à I.

<u>Cas précédent:</u> Pour $I = \{0\}$, on a $\hat{W}_I = S_n$ et $S_n \backslash \hat{W}/S_n = (\mathbb{Z}^n)_+$.

Considérons <u>la variété de Deligne-Lusztig affine generalisé de type I</u>

$X_w(\Phi) = \{ g \in G(L)/K_I \,;\, \mathrm{inv}(g, \Phi(g)) = w \}$ pour $w \in \tilde{W}_I \backslash \hat{W}/\hat{W}_I$.

Pour l'analogue sur un corps fini, $X_w(\Phi) \neq \emptyset$ et on a une

formule pour $\dim X_w(\Phi)$.

<u>Problème:</u> Determiner les w, Φ pour lesquels $X_w(\Phi) \neq \emptyset$.

Pour $I = \{0\}$, le Théorème 1 est la réponse,

<u>Theorème 1'</u>: On a $X_\mu(\Phi) \neq \emptyset \iff \mu \geq \nu(N, \Phi)$.

Mais déja pour le cas d'Iwahori et GL_3 la réponse n'est pas connu

Et $\dim X_w(\Phi)$ est un mystère dans tous les cas au-dela de GL_2

La situation s'améliore si on prend une certaine réunion de var.

de D-L. (motivé par la réduction de var. de Shimura).

<u>Définition:</u> Soit $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$.

(i) On considère $\mathbb{Z}^n \subset \widetilde{W}$. Le <u>sous-ensemble μ-admissible de $\widetilde{W}$</u> est le sous-ensemble fini

$$\mathrm{Adm}(\mu) = \{ w \in \widetilde{W} \ ; \ w \leq \mu' \text{ pour un } \mu' \in S_n \mu \}.$$

(ii) Si $\emptyset \neq I \subset \{0, \ldots, n-1\}$, alors

$$\mathrm{Adm}_I(\mu) - \text{image de } \mathrm{Adm}(\mu) \text{ dans } \widetilde{W}_I \backslash \widetilde{W} / \widetilde{W}_I.$$

Soit $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$ minuscule, c.a.d. $\mu_1 - \mu_n \leq 1$. Alors

$$\mathrm{inv}(M_\bullet, M'_\bullet) \in \mathrm{Adm}_I(\mu) \iff \mathrm{inv}(M_i, M_i) \leq \mu, \ \forall i \in I.$$

Vrai même dans le cas non-minuscule, au moins pour $I = \{0, \ldots, n-1\}$ (Haines/Ngo).

Soit maintenant μ minuscule et posons

$$X(\mu, \Phi)_I = \bigcup_{w \in \mathrm{Adm}_I(\mu)} X_w(\Phi).$$

Si $I = \{0\}$, alors $I(\mu, \Phi)_I = X_\mu(\Phi)$.

Théorème 2: (i) On a $X(\mu, \Phi)_I \neq \emptyset \iff \mu \geq \nu(N, \Phi)$

(ii) Pour $I' \subset I$ l'application d'oubli

$$X(\mu, \Phi)_I \longrightarrow X(\mu, \Phi)_{I'}$$

est surjectif.

Ici le point (i) pour $I = \{0\}$ résulte du Théorème 1. Pour le reste on utilise le lemme suivant.

Soit $k = \bar{k}$, soit $n \geq 1$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/n$ on se donne un espace vectoriel W_i, tous de la même dim. > 0. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on fixe une applic. $\begin{cases} \text{semi-lin. } \varphi_i : W_{i-1} \to W_i \text{ p.r.à } \sigma, \\ \text{———— } \psi_i : W_i \to W_{i-1} \text{ ——— } \tau, \end{cases}$

On impose $\varphi_i \circ \psi_i = \psi_i \circ \varphi_i = 0$.

Dessin:

$$\begin{tikzcd}
& W_1 \arrow[dl, shift left, "\psi_1"] \arrow[dr, shift left, "\varphi_2"] & \\
W_0 \arrow[ur, shift left, "\varphi_1"] \arrow[d, shift left, "\psi_0"] & & W_2 \arrow[ul, shift left, "\psi_2"] \arrow[d, shift left] \\
W_{n-1} \arrow[u, shift left, "\varphi_0"] & & {} \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

Lemme: Il existe un n-tuple de droites $\ell_i \subset W_i$ t.q.

Wedhorn. $\varphi_i(\ell_{i-1}) \subset \ell_i, \quad \psi_i(\ell_i) \subset \ell_{i-1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}/n.$

Commentaires sur la démonstration du Théorème 1 :

Soit (N, Φ) avec une seule pente, donc $\nu(N,\Phi) = \nu \cdot \mathbb{1}$ avec $n \cdot \nu = r \in \mathbb{Z}$. Alors $\exists$ base $e_1, \dots, e_n$ de N t.q.

$\Phi(e_1) = e_2$, $\Phi(e_2) = e_3$, ..., $\Phi(e_n) = \pi^r e_1$.

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{Z}^n)_+$. Alors $\mu \geq \nu \cdot \mathbb{1} \Leftrightarrow \sum_i \mu_i = r$.

Si c'est le cas, on pose

$$M = \operatorname{span}\{ \pi^{\sum_2^n \mu_i} e_1, \pi^{\sum_3^n \mu_i} e_2, \dots, \pi^{\mu_n} e_{n-1}, e_n \}.$$

Alors $\mu(M) = \mu$.

Dans le cas où f_μ passe par tous les points de brisure de $f_{\nu(N)}$, ça marche de même. On réduit le cas général à ce cas spécial, mais la solution n'est plus explicite.

Un ingrédient essentiel est la réciproque à un autre thme classique, celui de Satake sur les coefficients de la matrice qui décrit l'isomorphisme de Satake

(Rapo, Waldspurger, Haines ; $\exists$ une démonstr. en termes des fcts symétriques

Je remercie les organisateurs de m'avoir invité à ce congrès. Je suis particulièrement heureux de parler à cette conférence en l'honneur de Michel Raynaud. En effet, j'ai suivi assidûment les cours qu'il avait faits dans les années 70 sur les courbes et leurs jacobiennes - et ces cours ont été essentiels pour ma formation mathématique.

En particulier, Michel, je repense avec plaisir à la patience avec laquelle tu m'avais expliqué un point dans ton cours que je n'arrivais pas à saisir. Et ce non pas une fois, mais trois fois, au grand amusement de l'audience.