Paris, Mars 02

Exposé : Sur la stratification de Newton
(Bourbakiarbe.

exposé sur la géométrie algébrique en car $p > 0$.

Motivation : Soit $k = \bar{k}$. Regardons $\mathbb{P}^1 / k$ = espace des modules paramétrants les courbes elliptiques / k.

- Si $k = \mathbb{C}$, alors "$\forall \forall$" $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la courbe elliptique E_x n'a pas CM : $\mathrm{End}(E_x) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

Courbes elliptiques exceptionelles (CM) : $\mathrm{End}(E_x) \otimes \mathbb{Q} = K/\mathbb{Q}$ corps quadr. imaginaire.

- Si $k = \overline{\mathbb{F}}_p$, alors pour tout $x \in \mathbb{P}^1(k)$ sauf un nombre fini on a $\mathrm{End}(E_x) \otimes \mathbb{Q} = K/\mathbb{Q}$ corps quadr. imaginaire

Kronecker : exceptions : courbes ell. supersingulières, où $\mathrm{End}(E_x) \otimes \mathbb{Q}$ algèbre de division non-commut.

Une analyse plus approfondie montre que la différence entre le cas ordinaire et le cas supersingulier est liée au gpe p-divisible associé $E \rightsquigarrow X = E(p^\infty)$. On a

$$E \text{ ordinaire} \Rightarrow X \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \times \hat{\mathbb{G}}_m$$

$$E \text{ supersingulier} \Rightarrow X \text{ irréd d'un type nouveau}$$

Pour décrire ces gpes p-div. nouveaux on introduit des objets d'algèbres linéaire, et je vais commencer mon exposé par les défin

Soit k = corps parfait de car p. Soit

$W(k)$, $L = \mathrm{Frac}(W(k))$, σ = aut. de Frobenius.

anneau de val. complet à corps residuel k, ext. non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$

Définition : a) Un F-cristal sur k $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ un $W(k)$-module M libre de rang fini, muni de $F : M \to M$ σ-linéaire t.q. $M/F(M)$ longueur finie.

b) Un F-isocristal sur k $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ un L-espace vectoriel N de dimension finie, muni de $F : N \to N$ σ-linéaire et bijectif.

Clair : Un F-cristal definit un F-isocristal par $M \mapsto M \otimes_{W(k)} L$.

(F-isocrist / k) catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire noeth. et artinienne.

forme canonique de Jordan

Thm (Dieudonné) : Soit $k = \bar{k}$. Alors (F-isocrist / k) est une catégorie semi-simple Les objets simples sont parametrés par les elts de $\mathbb{Q}$ ainsi : soit $\lambda = r/s$, $s > 0$, $(r,s) = 1$. Alors à λ correspond

$$E_\lambda = \left(L^s , \begin{pmatrix} 0 & & p^r \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma \right).$$

Et $\mathrm{End}(E_\lambda) = D_\lambda$.

On obtient ainsi une application (vecteur de Newton, ou des pentes),

$\{F\text{-isocrist}/k\}/\simeq$ de rang n $\longrightarrow (\mathbb{Q}^n)_+ = \{(\nu_1, \dots, \nu_n) ; \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n\}$

$(N, F) \longmapsto \nu(N, F)$, où $\lambda \in \mathbb{Q}$ apparaît avec mult. = dim. de la comp. isotypique de type λ dans N.

„pentes"

Alors, cette application est injective et son image est caractérisé par la condition d'intégralité : écrivons $\nu = (\nu(1)^{m_1}, \dots, \nu(r)^{m_r})$ avec $\nu(1) > \dots > \nu(r)$. Alors $\nu \in$ image ssi $m_i \cdot \nu(i) \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, r$

Théorie de Dieudonné : Soit k parfait. Alors il associe

X = gpe p-div. $/k \rightsquigarrow (M(X), F)$ F-cristal sur k.

On obtient ainsi une anti-équiv. de catégories :

- (gpes p-div. $/k$) $\rightsquigarrow$ (F-cristaux (M, F) sur k, t.q. $pM \subset FM \subset M$)

- (gpes p-div. $/k$ à isogénie près) $\longrightarrow$ (F-isocristaux sur k, t.q. toutes les pentes entre 0 et 1)

ne dépend que de $(N, F) \otimes_{W(k)} W(\bar{k})$.

Courbes elliptiques
- ordinaires $\nu = (1, 0)$ — $\mathrm{End} = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$
- supersingulières $\nu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, — $\mathrm{End} = D_{\frac{1}{2}}$

Maintenant on veut regarder des familles de F-isocristaux.

Soit S = schéma de car. p. Soit

$(\mathcal{E}, F)$ = famille de F-isocristaux paramétrés par S, de rang constant n.

[penser à un schéma abélien A/S, voire un gpe p-div. X/S]

On obtient donc une application

$$S \longrightarrow (\mathbb{Q}^n)_+ , \qquad s \longmapsto \nu(\mathcal{E}_s, F_s)$$

Sur $(\mathbb{Q}^n)_+$ on a l'ordre de dominance usuel :

$$(\nu_1, \dots, \nu_n) \leq (\nu'_1, \dots, \nu'_n) \quad \text{ssi} \quad \sum_{i=1}^r \nu_i \leq \sum_1^r \nu'_i \quad \forall\, r = 1, \dots, n-1$$

et $\sum^n \nu_i = \sum^n \nu'_i$. Soit

$$\|\nu\| = \sum_1^n \nu_i .$$

<u>Thm (Grothendieck)</u>: Soit $(\mathcal{E}, F)/S$ de rang constant n.

Alors $s \longmapsto \|\nu(\mathcal{E}_s, F_s)\|$ est loc. const. sur S et $\forall \nu_0 \in (\mathbb{Q}^n)_+$

$$\{ s \in S ;\ \nu(\mathcal{E}_s, F_s) \leq \nu_0 \}$$

est fermé dans S.

Donc $\nu(\mathcal{E}_s, F_s)$ <u>décroît par spécialisation</u>

découvert à la même époque

<u>Analogue</u>: Soit X surface de Riemann compacte. A $\mathcal{E}$ = fibré vect. de rang n $\mapsto$ vecteur de HN dans $(\mathbb{Q}^n)_+$. <u>Il augmente par spécialisation</u> !

Si $(\mathcal{E}, F)/S$ de rang n $\rightsquigarrow$

$$S = \dot{\bigcup_{\nu \in (\mathbb{Q}^n)_+}} S_\nu \quad \text{réunion finie disjointe}$$

avec $\overline{S}_\nu \subset \bigcup_{\nu' \leq \nu} S_{\nu'}$

<u>stratification de Newton de S assoc. à</u> $(\mathcal{E}, F)$.

Mais en général l'adhérence d'une strate n'est pas réunion de strates

<u>Thm 1 (de Jong, Oort)</u>: Soit $(S_\nu)_\nu$ stratif de Newton assoc. à $(\mathcal{E}, F)/S$. Soit η un point générique de $\overline{S}_\nu \setminus S_\nu$. Alors

pureté

$$\dim \mathcal{O}_{\overline{S}_\nu, \eta} = 1.$$

<u>Thm 1'</u> (— " —): Soit $(\mathcal{E}, F)/S$. Soit $U \subset S$ t.q. $\mathrm{codim}\,(S \setminus U) \geq 2$. Si le vecteur de Newton de $(\mathcal{E}, F)$ est constant sur U, alors il est constant sur S tout entier.

<u>Autrement dit, les sauts dans la stratific. de Newton sont tous en codim. 1</u> (faux pour fibrés vect. $/X$!).

Le cas qui nous intéresse est celui où $(\mathcal{E}, F)$ vient de X/S.

<u>Structure des gpes p-div. X/S à vecteur de Newton constant</u>:

a) (de Jong, Oort): Si une seule pente (<u>cas isocline</u>), alors „correspond à" un système local p-adique sur S. En particulier, si $S = \mathrm{Spec}\, A$, avec A anneau local strictement hensélien, alors X est isogène à X_0 constant.

<u>Par contre, il existe des extensions non-triviales entre gpes p-div. isoclines</u> (semi-simplicité n'est plus valable : Serre - Tate)

b) (Zink, analogue de la filtr. de HN) : Soit S régulier (normal suffirait). Alors X est isogène à Y qui admet filtr.

$$(0) = Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_r = Y \,,$$

t.q. si $\nu = (\nu(1)^{m_1}, \ldots, \nu(r)^{m_r})$ alors $\exists\ r_i, s_i > 0$ avec $\nu(i) = r_i / s_i$ et t.q.

$$p^{-r_i} \cdot Fr^{s_i} : Y_i \longrightarrow Y_i^{(\sigma^{s_i})}$$

est une isogénie qui induit un isomorphisme

$$Y_i / Y_{i-1} \longrightarrow (Y_i / Y_{i-1})^{(\sigma^{s_i})} .$$

<u>Sur la démonstration du Thm 1' dans le cas, où $(\mathcal{E}, F)$ vient de X/S</u>. Ops

$S = \mathrm{Spec}\, A$, où A local noeth. complet normal à corps résiduel alg. clos

$U = S \setminus \{s\}$

Soit $\tilde{S} \longrightarrow S$ résolution des singularités. Remplaçant X/U par Y isogène, d'après b) on obtient par a)

$$\varrho_i : \pi_1(U) \longrightarrow GL_{n_i}(W(\mathbb{F}_{p^i}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p),$$

corresp. à Y_i / Y_{i-1}. Tout revient alors à démontrer que les ϱ_i sont non-ramifiés, donc s'étendent à $\pi_1(\tilde{S})$

Thm (de Jong, Oort): Soit (S, U) comme ci-dessus et $\pi : \tilde{S} \to S$ résolution des sing. On a donc une applic. injective

$$H^1_{et}(\tilde{S}, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow H^1_{et}(\pi^{-1}(U), \mathbb{Q}_p) = H^1_{et}(U, \mathbb{Q}_p)$$

C'est un isomorphisme.

Dém. de l'analogue topologique: Donc (S, s) germe de surface complexe normal. Suite exacte longue à support dans $E = \bigcup E_i = \pi^{-1}(s)$,

regularisieren

$$H^1(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{①} H^1(U, \mathbb{Q}) \to H^2_E(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{②} H^2(\tilde{S}, \mathbb{Q})$$

Suffit injectivité de ②. Mais $H^2_E(\tilde{S}, \mathbb{Q})$ a une base formée de cls (E_i). Image de cls(E_i) par le composé

$$H^2_E(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^2(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^2(E_j, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

est (E_i, E_j). L'assertion résulte de la non-dég. de $(E_i \cdot E_j)$

Dans le cas qui nous intéresse la démonstr. est plus difficile

Soit $g \geq 1$. Soit $n \geq 3$, $(n,p)=1$ entier auxiliaire. Soit

$\mathcal{M}$ = espace de modules des var. abéliennes p.p. de dim g avec str. de niveau n.

C'est un schéma lisse de dim. $d = \frac{g(g+1)}{2}$ sur $\mathbb{F}_p$.

$A \quad A/\mathcal{M}$ universel $\rightsquigarrow$ $\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{M}_\nu$

Ici ν parcourt

$$B = B_g = \{ (\nu_1, \dots, \nu_{2g}) \in (\mathbb{Q}^{2g})_+ \; ; \; \nu_i + \nu_{2g-i+1} = 1, \; 0 \leq \nu_i \leq 1, \; \forall i = 1, \dots, g$$
$$+ \text{ cond. d'intégralité } \}.$$

Alors B est un poset <u>caténaire</u> fini avec un unique

elt maximal $\rho = (1^g, 0^g)$ ordinaire

minimal $\sigma = ((\tfrac{1}{2})^{2g})$ supersing

Pour $\nu \in B$, soit $d(\nu) = d - \mathrm{dist}(\nu, \rho)$.

<u>Thm 2 (Oort)</u>: Toute strate $\mathcal{M}_\nu$ est équidimensionnelle de dimension $d(\nu)$ et $\overline{\mathcal{M}_\nu} = \bigcup_{\nu' \leq \nu} \mathcal{M}_{\nu'}$.

<u>Analogue pour fibrés vect sur X est faux!</u>

Démonstr. du Thm 2 se fait (via Serre-Tate) par la théorie des déformations des gpes p-divisibles (<u>displays</u>), puis on applique le thm 1.

<u>Commentaires</u> : a) Le fait que $\mathcal{M}_e$ est ouvert et dense est très courant en <u>bonne réduction</u>

b) On peut espérer que $\mathcal{M}_\sigma$ a une description explicite en termes d'algèbre linéaire : c'est vrai pour $g = 2$ et en partie pour $g = 3$.

c) <u>Conjecture</u> Toute comp. irréduct. de $\mathcal{M}_\nu$ rencontre $\mathcal{M}_{\nu'}$ pour tout $\nu' \leq \nu$.