Leipzig, Nov. 2002

Vortrag: Umkehrungen der Ungleichungen von Mazur, Schäfer, Frobenius

Grundideen der Math. des 20. Jhd: Kohomologie

Versuch, sing. Kohom. auf alg. Var. über Körper der Char p zu übertragen, stößt auf folg. Obstr. (Serre):

Sei $E / \overline{\mathbb{F}}_p$ ell. Kurve. Erhalten

$$\mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(\underbrace{H^1(E, \mathbb{Z})}_{\neq M_2(\mathbb{Z})}) \text{ bzw. } \mathrm{End}(E)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{End}(\underbrace{H^1(E, \mathbb{Q})}_{\neq M_2(\mathbb{Q})})$$

Aber ex E supersingulär, d.h. $\mathrm{End}(E)_{\mathbb{Q}}$ Quat.-alg. der Dim. 4 $\Rightarrow$ unmöglich. Genauere Analyse zeigt: $H^1(E, \mathbb{Z}_p)$ bzw. $H^1(E, \mathbb{Q}_p)$.

Führt zur Einführung von kristalliner Koho.

In meinem Vortrag geht es nur um die lineare Alg., die in diesem Zushg. auftritt.

Bezeichnungen: $L = \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$, $\mathcal{O}_L$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, $\pi = p$ Unif.

[genauso $L = \overline{\mathbb{F}}_p((t))$, $\pi = t$.]

Def.: Isokristall $= (V, \varphi)$.

bilden $\mathbb{Q}_p$-lin. abelsche Kat., jedes Obj. endl. Länge

Dieudonné: Kat. ist $\frac{1}{2}$-einfach. Einf. Obj. parametr. durch $\lambda \in \mathbb{Q}$:

Sei $\lambda = r/s$, $s > 0$, $(r, s) = 1$ $\mapsto$

$E_\lambda = \left(L^s, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} \sigma \right)$

Kontrast zur Th. der lin. Endo's: diese nicht halbeinfach.

z. B. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ σ-konj. zu $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Fakt z. Newtonabb.:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Isom.-Kl. von Isokrist.}\\ \text{der Dim } n\end{array}\right\} \longrightarrow (\mathbb{Q}^n)_+ = \{(\nu_1,\dots,\nu_n)\in\mathbb{Q}^n;\ \nu_1\ge\nu_2\ge\dots\ge\nu_n\}$$

$\nu(V,\varphi)=\nu$, wobei $\mathrm{mult}_\lambda(\nu)$ = Dim. des λ-typ. Anteils von (V,φ).

Diese Abb. ist injektiv, Bild kann man durch Int.-bed. beschreiben (Newtonpolygon).

Sei (V,φ) der Dim n. Sei M ein O_L-Gitter in V

$\mapsto$ $\mu(M)\in(\mathbb{Z}^n)_+$.

Dabei $\mu(M)=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ gdw. ex. O_L-Basis $e_1,\dots,e_n$ von M

s.d. $\pi^{\mu_1}e_1,\dots,\pi^{\mu_n}e_n$ —— $\varphi(M)$

Auf $(\mathbb{Q}^n)_+$ übl. Dominanzordnung (Weylordnung)

Mazur's Ungl.: $\mu(M)\ge\nu(V,\varphi)$

Beisp.: $E/\overline{\mathbb{F}}_p$ $\mapsto$ $M = H^1_{cris}(E) \subset H^1_{cris}(E)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$.

$\mu(M)=(1,0)$. $\Rightarrow$ $\nu \in \left\{\begin{array}{l}(1,0)\\ (\frac12,\frac12)\end{array}\right.$.

Satz 1 (Kottwitz, R.): Sei (V,φ) der Dim n. Sei $\mu\in(\mathbb{Z}^n)_+$ mit $\mu\ge\nu(V,\varphi)$.

Ex. $\exists$ $M \subset V$ mit $\mu(M) = \mu$

<u>Zunächst zur Satakeungl.</u> Sei (F, O_F, π) wie vorher, oder für $F = \mathbb{Q}_p$ bzw $F = \mathbb{F}_p((t))$.

Sei $G = GL_n(F)$, $K = GL_n(O_F)$, N = obere unip.

Satakeungl. vergleicht die Cartan zerl. mit Iwasawazerl.

<u>Cartan:</u> $G = K \cdot (\mathbb{Z}^n)_+ K$

via $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \mapsto \pi^\mu = \mathrm{diag}(\pi^{\mu_1}, \ldots, \pi^{\mu_n})$

Nichts anderes als Elementarteiler via $G/K = O_F$-Gitter in F^n

und $K \backslash G/K = G \backslash [G/K \times G/K]$.

<u>Iwasawa:</u> $G = N\, \mathbb{Z}^n K$

<u>Satz</u> (Satake-Ungl.) Seien $\lambda, \mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$. Genau dann ist

$K \cdot \pi^\mu K \cap N\pi^\lambda K \neq \emptyset$, wenn gilt $\mu \geq \lambda$.

Satz 2 $\xRightarrow{\text{für } F = \mathbb{Q}_p}$ Satz 1, falls $\varphi = \pi^\lambda \sigma$: Wg $\mu \geq \lambda$ ex. $u \in N(\mathbb{Q}_p)$ mit $u \cdot \pi^\lambda \in K \pi^\mu \cdot K$. Aber in Borel sind π^λ und $u\pi^\lambda$ σ-konj. in $B(L)$: ex $g \in B(L)$ mit $u\pi^\lambda = g^{-1} \cdot \pi^\lambda \sigma(g)$. Sei

$M = g\, O_L^n$. Dann

→ Kodel über $\mathbb{R}$ $\quad \mu(M) = \mathrm{inv}(g M_0, \pi^\lambda \sigma(g) \cdot M_0)$

$= K \cdot g^{-1} \cdot \pi^\lambda \sigma(g) \cdot K = \mu$

Schließlich zur Fontaine-Ungl.

Sei (V,φ) Isokrist. der Dim. n. Betr. aufsteig. $\mathbb{Z}$-Filtr. $\mathcal{F}^\bullet$ auf V. Sei $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$. Dann heißt $\mathcal{F}^\bullet$ vom Typ μ, falls

$$\dim_L \mathrm{gr}^i_{\mathcal{F}}(N) = \#\{k;\ \mu_k = i\},$$

d.h. Sprungstellen $\mu_1, \dots, \mu_n$ mit Multipl. $\quad \mu(\mathcal{F}^\bullet)$

Def.: $\mathcal{F}^\bullet$ zulässig $:\Leftrightarrow$ $\forall\, (V',\varphi') \subset (V,\varphi)$ ist

$$\|\mu(\mathcal{F}')\| \leq \|\nu(V',\varphi')\| \quad , \text{Gleichh. für } V' = V.$$

Motivation: Kommt von Vergleich zw. Etalkoho von alg. Var. / L mit guter Red und DeRham-koho.

~~Satz 3 (Fontaine, Rapo)~~

Fontaine: $\mathcal{F}^\bullet$ zuläss $\Rightarrow \mu(\mathcal{F}^\bullet) \geq \nu(V,\varphi)$.

Satz 3 (Fontaine, Rapo): Sei (V,φ) der Dim n. Sei $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$ mit $\mu \geq \nu(V,\varphi)$. Dann ex. zuläss. $\mathcal{F}^\bullet$ mit $\mu(\mathcal{F}^\bullet) = \mu$.

Satz 3 $\Rightarrow$ Satz 1: Jedes Gitter M adapt. zu $\mathcal{F}^\bullet$ hat $\mu(M) = \mu(\mathcal{F}^\bullet)$. Solche gibt es nach Laffaille

Genauer gilt: Betr. alle $\mathcal{F}^\bullet$ vom Typ μ, bildet Flaggenvar. $\mathfrak{F}$ (über $\mathbb{Q}_p$). Dann gilt: Jeder, sehr allg. Pkt von $\mathfrak{F}(L)$ ist zulässig.

Beispiel: Sei $\nu(V,\varphi) = (1, \dots, 1)$. Sei $\mu = (n, 0, \dots, 0)$.

Dann ist $\mathfrak{F} = \mathbb{P}^{n-1}$. Dann ist

$$\mathcal{F}(L)^{\text{zul}} = \mathbb{P}^{n-1} \setminus \bigcup_{H/\mathbb{Q}_p} H$$ Drinfeld'sche obere Halbebene

Zulässigkeit ist eine Stabilitäts bed. Für beliebiges μ kann man HN-Stratifiz. auf $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mu$ betrachten und sich fragen, welches die HN-Strata von $\mathcal{F}(L)$ sind: oben $\hat{=}$ größtmögl. Strata

Antwort von Orlik: Reisegrund!

Bonn, Juni 2002

Vortrag: Umkehrungen der Ungleichungen von Fontaine, von Mazur und von Satake, und ihre Bedeutung

Motivation: Reduktion modulo p von Shimura varietäten.

Typische Fragestellung: Sei A_0 abelsche Var. $/ k = \bar{k}$. Beschreibe die Menge aller abelschen Var. isogen zu A_0.

Fall $k = \mathbb{C}$: Sei $V = H_1(A_0, \mathbb{Q})$. Dann ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isom.-kl. von abelschen Var.} \\ \text{isogen zu } A_0 \end{array} \right\} \leftrightarrow \{ \text{Gitter in } V \} \,/\, \mathrm{Aut}(A_0)_{\mathbb{Q}}$$

Fall $k = \bar{\mathbb{F}}_p$: rationale Koh. ex. nicht, daher Erg. komplizierter,

$$\left[\{ \text{Gitter in } {\prod_{\ell \neq p}}' V_\ell(A_0) \} \times \{ \varphi\text{-Gitter in } V_p(A_0) \} \right] / \mathrm{Aut}(A_0)_{\mathbb{Q}}$$

Dabei ist

$$V_p(A_0) = \text{rationaler Dieudonnémodul von } A_0 \text{ (krist. Koh.)}$$

$$= \text{VR über } \mathrm{Frac}(W(k)), \text{ mit } \sigma\text{-li. Endo } \varphi$$

$$\varphi\text{-Gitter} = \{ M \ \ W(k)\text{-Gitter in } V_p(A_0),$$

$$pM \subset \varphi(M) \subset M \ , \ \dim_k M/\varphi(M) = \dim A_0 \}$$

Ergeben sich 2 Probleme:

- Verstehe $V_p(A_0)$ ⇝ Isokristalle : recht gut verstanden
- Verstehe Gitter : erst am Anfang

[illegible] V_p nicht als σ-li. Algebra

<u>Bezeichnungen:</u> F = endl. Erw. von $\mathbb{Q}_p$

L = Vervollst. der max. unverzw. Erw. von F

$\sigma \in Gal(L/F)$ relativer Frob.

O_F bzw. O_L und $\pi \in O_F$ Unif.

<u>Def:</u> Ein F-<u>Isokristall</u> $\underset{Df}{=}$ endl.-di. VR N über L
+ $\varphi: N \to N$ bij. σ-lin

bis σ-Konjug.

Bilden off. F-lin. Kat, jedes Obj. endl. Länge

<u>Dieudonné:</u> Diese Kat. ist halbeinf. Einf. Objekte parametr. durch Elte aus $\mathbb{Q}$: zu $\lambda = \frac{r}{s}$, $s > 0$, $(r,s) = 1$ bis

$$E_\lambda = \left(L^s, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ \pi^r & & & 0 \end{pmatrix} \sigma \right)$$

Z: Kontrast zur Th. der lin. Endo's: diese nicht halbeinf.,

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ σ-konj. zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Führt zur Newtonabbildung:</u>

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isom.-kl. von } F\text{-Isokrist.} \\ \text{der Dim. } n \end{array} \right\} \longrightarrow (\mathbb{Q}^n)_+ := \{ (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Q}^n ; \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n \}$$

$\nu(N, \varphi) = \nu$, wobei $mult_\lambda(\nu)$ = dim des λ-Typ. Anteils von (N, φ)

Die Abb. ist injektiv, Bild kann man beschreiben.

Sei (N,φ) der Dim n. Sei M ein O_L-Gitter in N (Kristall)

mit $\mu(M) \in (\mathbb{Z}^n)_+$

Dabei $\mu(M) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ gdw. $\exists$ O_L-Basis $e_1, \dots, e_n$ von M

s.d. $\pi^{\mu_1} e_1, \dots, \pi^{\mu_n} e_n$ Basis von $\varphi(M)$ (Elementarteilersatz)

Auf $(\mathbb{Q}^n)_+$ übl. Dominanzordnung (Weylordnung), $\|\nu\| = \|\nu'\|$

<u>Mazur's Ungleichung</u>: $\mu(M) \geq \nu(N,\varphi)$.

<u>Satz 1 (Kottwitz, R.)</u>: Sei (N,φ) der Dim n. Sei $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$

mit $\mu \geq \nu(N,\varphi)$. Dann $\exists$ M in N mit $\mu(M) = \mu$.

<u>Bemerkungen</u>: (i) Ex-satz, aber auch negativ interpretierbar.

(ii) Die Menge $\{M;\ \mu(M) = \mu\}$ volle affine DL-Var.

Prop. gibt Nichtleerheit dieser DL-Var. Für allgemeine parahorische Untergr. kein Analogon bekannt.

(iii) $\exists$ Variante, wo N mit sympl. Form versehen: dann $\exists$ selbstduales Gitter M mit vorgeg. μ-Invariante. Sollte allg. für zerfallende Gr. gelten.

(iv) Die Menge $\{\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+ ;\ \mu \geq \nu(N,\varphi)\}$ hat genau ein minimales Elt. μ_0. ~~Die entspr. DL-Var. ist ein Orbit unter Aut(N,φ)~~.

Zum Beweis später. Zunächst zur Satakeungl.

Sei

$G = GL_n$ (geht allg. für zerfallende Gr. / F).

$K = GL_n(O_F)$ max. komp. UG von $G(F)$

Sei

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(G(F)/\!/K)$ = Heckealg. der C_0^∞-Fkt., biinv. unter K

<u>Satakehomo</u>

$$b: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] = \mathbb{C}[T]$$

$$b(f)(t) = \delta_B^{1/2}(t) \cdot \int_{U(F)} f(tu)\, du$$

Dabei $B = T \cdot U$.

<u>Satake</u>: b liefert Isomorph.

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^{S_n}.$$

Beweis in 2 Schritten,

1.) $\mathrm{Im}(b) \subset S_n$-Invarianten

2.) Satakegleichung: $\mathbb{C}$-Basis für

<u>Quelle</u>: $f_\mu = \mathrm{char}\, K \pi^\mu K$, $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$

<u>Ziel</u> $m_\lambda = \sum_{\nu \in S_n \lambda} X^\nu$, $\lambda \in (\mathbb{Z}^n)_+$.

Somit

$$b(f_\mu) = \sum_\lambda c_{\mu\lambda}\, m_\lambda \qquad (\text{sic})$$

wobei $c_{\mu\lambda} \geq 0$

Satake's Ungleichung: $C_{\mu\mu} > 0$ und falls $C_{\mu\lambda} > 0$ so $\mu \geq \lambda$.

Satz 2 (Waldspurger, R; Haines): Falls $\mu \geq \lambda$, so $C_{\mu\lambda} > 0$.

Reformulierung: Betr.

$$X = G(F)/K \quad \text{mit Basispunkt } x_0.$$

$$\operatorname{inv}: X \times X \longrightarrow (\mathbb{Z}^n)_+ \qquad \text{Elementarteilersch.}$$

(∗) Falls $\mu \geq \lambda$, so $\exists u \in U(F)$ mit

$$\operatorname{inv}(x_0, u \cdot \pi^\lambda x_0) = \mu.$$

Bemerkungen (i) Gibt mehrere Beweise: induktiv; symm. Fkten, Macdonaldf.

(ii) Keine Bez. zu andere Pos.-auss. (z.B. Kostkapolynome etc.).

(iii) Satz 2 $\Rightarrow$ Satz 1, zumind. falls $\varphi = \pi^\lambda \cdot \sigma$: sei

$u \in U(F)$ mit $\operatorname{inv}(x_0, u \cdot \pi^\lambda x_0) = \mu$.

Aber in Borel $B(L)$ sind π^λ und $u\pi^\lambda$ σ-konj.

(cf. Halbeinf. in Dieudonné): $u\pi^\lambda = g \cdot \pi^\lambda \cdot \sigma(g)^{-1}$

Sei $M = g \cdot O_L^n$. Dann

$$\begin{aligned}\mu(M) &= \operatorname{inv}(g x_0, \pi^\lambda \sigma(g) x_0) \\ &= \operatorname{inv}(x_0, g^{-1} \pi^\lambda \sigma(g) x_0) \\ &= \operatorname{inv}(x_0, u \pi^\lambda x_0) \\ &= \mu.\end{aligned}$$

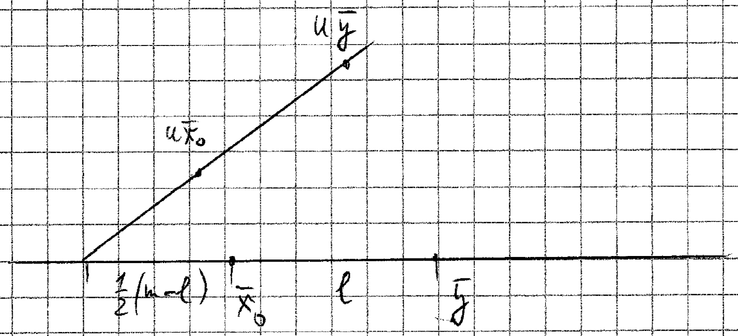
(iv) <u>Beweis von Satz 2 für GL_2</u>: Aussage in diesem Fall lautet,

seien $l, m \in \mathbb{Z}_+$ mit $m-l \in 2\mathbb{Z}_+$. Sei $\mathcal{T}$ = B-T-Tree

Sei $\bar{x}_0$ Basisecke, $\bar{y} = \mathrm{diag}(\pi^l, 1)\cdot \bar{x}_0 \in \mathcal{T}$ Ecke

Dann ex $u \in U(F)$ s.d. $d(\bar{x}_0, u\cdot\bar{y}) = m$.

<u>Bild</u>:



<u>Schließlich zur Fontaine-Ungleichung</u>: Sei (N,φ) F-Isokr. der Dim n.

Betr. aufst. $\mathbb{Z}$-Filtr. $\mathcal{F}^\bullet$ von N. Sei $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$. Dann

$\mathcal{F}^\bullet$ <u>vom Typ</u> μ, falls

$$\dim_L gr^i_{\mathcal{F}}(N) = \#\{k;\ \mu_k = i\},$$

d.h. Sprungstellen in $\mu_1,\dots,\mu_n$, mit Mult.

<u>Fontaine's Ungleichung</u>: $\mathcal{F}^\bullet$ zulässig $\Rightarrow \mu(\mathcal{F}^\bullet) \geq \nu(N,\varphi)$.

<u>Dabei</u>: $\mathcal{F}^\bullet$ zulässig, falls $\forall (N',\varphi') \subset (N,\varphi)$ mit induz. Filtr. $\mathcal{F}'^\bullet$ gilt

$$\|\mu(\mathcal{F}')\| \leq \|\nu(N',\varphi')\|, \quad \text{Gleichheit für } N'=N.$$

Falls $F=\mathbb{Q}_p$, so $\mathcal{F}^\bullet$ zulässig gdw. kommt von kristall. $Gal(\bar{L}/L)$-Darst.

Satz 3 (Fontaine, R): Sei (N,φ) über Dim. n. Sei $\mu \in (\mathbb{Z}^n)_+$ mit $\mu \geq \nu(N,\varphi)$. Dann ex. zuläss. $\mathcal{F}^\cdot$ mit $\mu(\mathcal{F}^\cdot)=\mu$.

Bemerkungen: (i) Genauer gilt: Betr. alle $\mathcal{F}^\cdot$ vom Typ μ, bildet Flaggenvarietät $\mathfrak{F}$ über L. Jeder "sehr allg. Punkt" von $\mathfrak{F}(L)$ ist zulässig.

(ii) Laffaille: $\mathcal{F}^\cdot$ zulässig mit $\mu(\mathcal{F}^\cdot)=\mu \Rightarrow \exists\ \mathcal{F}$ adapt. Gitter M (d.h. $M = \varphi\left(\sum_i \pi^{-i}(\mathcal{F}^i \cap M)\right)$). Aber dann $\mu(M)=\mu$. Also Satz 3 $\Rightarrow$ Satz 1.

(iii) Sei $\mu \geq \nu(N,\varphi)$. Erhalten

$$\mathfrak{F}^{adm} \subset \mathfrak{F}$$

zuläss. Ort = Periodenbereich zu (N,φ,μ): offen-zuläss. rigider Unterr. $\neq \emptyset$.

Erscheint als offenes Stratum in HN-Stratifizierung,

$$\mathfrak{F} = \dot{\bigcup_{\substack{\lambda \in (\mathbb{Q}^n)_+ \\ \|\lambda\|=0}}} \mathfrak{F}_\lambda\ ,$$

(analog zu VB / Kurve).

Offenes Problem: welche $\mathfrak{F}_\lambda \neq \emptyset$?

Zunächst Analogon über endl. Körpern untersuchen!