Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Blatt 2
40 Punkte

Abgabetermin: 30.04.2024, vor der Vorlesung um 8:15
Nur die vier Aufgaben, die mit einem (∗) bezeichnet sind, werden korrigiert und gewertet; für alle anderen Aufgaben brauchen keine Lösungen eingereicht zu werden.

Aufgabe 2.1 (∗ 10 Punkte) Sei $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ symmetrisch, d.h. es gelte $A = {}^tA$. Zeige, dass A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2.2 (∗ 10 Punkte) Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? Begründe die Antwort.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.3 Für welche reellen Zahlen a, b ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

Aufgabe 2.4 (∗ 10 Punkte) Diagonalisiere die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

aus $M(4 \times 4; \mathbb{R})$ simultan: bestimme eine Matrix $S \in GL_2(4; \mathbb{R})$, so dass SAS^{-1} und SBS^{-1} Diagonalmatrizen sind.

Aufgabe 2.5 (∗ 10 Punkte) Seien K ein Körper und seien $A, B \in M(n \times n; K)$ kommutierende Matrizen, die nicht notwendig diagonalisierbar sein müssen. Für jeden Eigenwert von A sei der zugehörige Eigenraum 1-dimensional. Zeige, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von B ist.

Aufgabe 2.6 Seien $A, B \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ mit charakteristischen Polynomen $P_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ und $P_B(t) = -t^3 + 7t^2 - 9t + 3$. Zeige, dass der Kern von AB 1-dimensional ist.