Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Blatt 4
40 Punkte

Abgabetermin: 14.05.2024, vor der Vorlesung um 8:15
Nur die vier Aufgaben, die mit einem $(*)$ bezeichnet sind, werden korrigiert und gewertet; für alle anderen Aufgaben brauchen keine Lösungen eingereicht zu werden.

Aufgabe 4.1 ($*$ 10 Punkte) Seien U und W Untervektorräume eines Vektorraumes V mit $V = U \oplus W$. Gegeben zwei Endomorphismen $G\colon U \to U$ und $H\colon W \to W$, so definieren wir $F\colon V \to V$ durch die Formel $F(u+w) = G(u) + H(w)$ für $u \in U$ und $w \in W$. Zeige:

(i) F ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G und H Isomorphismen sind.

(ii) F ist genau dann diagonalisierbar, wenn G und H diagonalisierbar sind.

(iii) F ist genau dann trigonalisierbar, wenn G und H trigonalisierbar sind.

(iv) F ist genau dann nilpotent, wenn G und H nilpotent sind.

(v) F ist genau dann idempotent, wenn G und H idempotent sind.

Aufgabe 4.2 ($*$ 10 Punkte) Bestimme für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix $P \in GL(3;\mathbb{R})$, eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N, sodass $A = P(D+N)P^{-1}$ und $DN = ND$.

Aufgabe 4.3 Sei A die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Zeige, dass $p_A(t) = (t-2)^4$ das charakterischies Polynom von A ist.

(ii) Finde eine Matrix $P \in GL(4;\mathbb{Q})$ sodass $A = PTP^{-1}$ gilt, wobei $T = 2 \cdot E_4 + N$ für eine nilpotente Matrix N.

Aufgabe 4.4 ($*$ 10 Punkte) Zeige:

(i) Ist $A \in M(n \times n; K), P \in GL(n;K)$ und $m \geq 1$, so gilt $(PAP^{-1})^m = PA^mP^{-1}$.

(ii) Sind $A, B \in M(n \times n; K)$ mit $AB = BA$ und $m \geq 1$, so gilt $(A+B)^m = \sum_{0 \leq i \leq m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i}$.

(iii) Mit Hilfe von (i) und (ii), berechne A^{50} für A von Aufgabe 4.2.

Aufgabe 4.5 ($*$ 10 Punkte) Für jede Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ definieren wir

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k \in M(n \times n; \mathbb{R}).$$

Wir verwenden ohne Beweis, dass die unendliche Summe koeffizientenweise absolut konvergiert, und somit $\exp(A)$ wohldefiniert ist.

(i) Bestimme $\exp(D)$ für eine Diagonalmatrix D.

(ii) Ist $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ und $P \in GL(n; \mathbb{R})$, so folgt $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$.

(iii) Sind $A, B \in M(n \times n; \mathbb{R})$ mit $AB = BA$, so gilt $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

(iv) Berechne $\exp(M)$ für die Matrix A von Aufgabe 4.2.

Aufgabe 4.6 Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $F^3 = F$. Zeige, dass F diagonalisierbar ist.