Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Blatt 5
40 Punkte

Abgabetermin: 28.05.2024, vor der Vorlesung um 8:15
Nur die vier Aufgaben, die mit einem $(*)$ bezeichnet sind, werden korrigiert und gewertet; für alle anderen Aufgaben brauchen keine Lösungen eingereicht zu werden.

Aufgabe 5.1 ($*$ 10 Punkte) Bestimme die Haupträume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -18 & -7 \\ 1 & -13 & -4 \\ -1 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.2 ($*$ 10 Punkte) Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines reellen Vektorraumes. Welche der folgenden Aussagen können wahr sein? Gib entweder ein Beispiel oder begründe die Antwort.

(i) V ist 6-dimensional, F hat Minimalpolynom $(x-2)^5$ und $\mathrm{Eig}(F,2)$ ist 3-dimensional.

(ii) V ist 6-dimensional, F hat Minimalpolynom $(x-2)(x-3)^2$ und $\mathrm{Eig}(F,2)$ ist 3-dimensional.

(iii) F hat Minimalpolynom $(x-2)^6$ und $F^2 - F = \mathrm{id}_V$.

(iv) F hat keine reellen Eigenwerten und $F^2 - F = \mathrm{id}_V$.

(v) V ist die direkte Summe von zwei F-invarianten 4-dimensionalen Unterräumen und es gibt keinen Jordanblock mit einer Größe von mehr als 3 in der Jordan-Normalform von F.

Aufgabe 5.3 Die folgenden reellen Matrizen sind in Jordan-Normalform. Bestimme ihre charakteristischen Polynome und Minimalpolynome.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.4 ($*$ 10 Punkte) Gib alle möglichen Jordan-Normalformen eines Endomorphismus F mit charakteristischem Polynom $(x-1)^3(x+2)$ an.

Aufgabe 5.5 ($*$ 10 Punkte) Sei V ein 6-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und F ein Endomorphismus von V mit charakteristischem Polynom $(t-1)(t+2)^5$ und Minimalpolynom $(t-1)(t+2)^3$. Bestimme alle möglichen Jordan-Normalformen von F.

Aufgabe 5.6 Sei K ein beliebiger Körper und sei $V = \{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \in K[t]\}$ der K-Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 3. Finde die Jordan-Normalform des Ableitungsoperators.