Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Musterlösung 1 Judith Marquardt

Aufgabe 1.1 ($*$ 10 Punkte) Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraumes V.

(i) *Angenommen, F ist* nilpotent, *d.h. es gibt eine natürliche Zahl n sodass $F^n = 0$. Zeige, dass Null der einzige mögliche Eigenwert von F ist.*
Sei n eine natürliche Zahl sodass $F^n = 0$. Sei λ ein Eigenwert von F mit zugehörigem Eigenvektor v. Dann ist

$$0 = F^n(v) = F^{n-1}(\lambda v) = \lambda F^{n-1}(v) \overset{\text{induktiv}}{=} \lambda^n v.$$

Da v ein Eigenvektor und somit nicht null ist, folgt $\lambda^n = 0$ und somit $\lambda = 0$.

(ii) *Angenommen, F ist* idempotent, *d.h. $F^2 = F$. Zeige, dass nur 0 und 1 mögliche Eigenwerte von F sind.*
Sei λ ein Eigenwert von F mit zugehörigem Eigenvektor v. Es gilt

$$\lambda v = F(v) = F^2(v) = F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda^2 v.$$

Da $v \neq 0$, folgt $\lambda^2 = \lambda$. Durch die Körperaxiome folgt nun $\lambda \in \{0, 1\}$.

(iii) *Angenommen, $F^2 + F$ hat den Eigenwert -1. Zeige, dass dann F^3 den Eigenwert 1 hat.*
Sei v ein Eigenvektor von $F^2 + F$ mit Eigenwert -1. Wir nutzen

$$(F + \mathrm{id}_V)^3 = F^3 + 3F^2 + 3F + \mathrm{id}_V$$

und drücken F^3 als $(F + \mathrm{id}_V)^3 - (3F^2 + 3F + \mathrm{id}_V)$ aus. Wir berechnen

$$\begin{aligned}(F + \mathrm{id}_V)^3(v) &= (F^3 + 3F^2 + 3F + \mathrm{id}_V)(v)\\ &= F(F^2 + F)(v) + 2(F^2 + F)(v) + F(v) + \mathrm{id}_V(v)\\ &= F(-v) + 2(-v) + F(v) + v = -v\end{aligned}$$

und

$$(3F^2 + 3F + \mathrm{id}_V)(v) = 3(F^2 + F)(v) + \mathrm{id}_V(v) = 3(-v) + v = -2v.$$

Somit gilt

$$F^3(v) = (F + \mathrm{id}_V)^3(v) - (3F^2 + 3F + \mathrm{id}_V)(v) = -v - (-2v) = v.$$

Also ist 1 ein Eigenwert von F^3.
Alternative kürzere Rechnung:

$$\begin{aligned}F^2(v) + F(v) = -v &\Rightarrow F^2(v) + F(v) + v = 0\\ &\Rightarrow F^3(v) + F^2(v) + F(v) = 0 \Rightarrow F^3(v) - v = 0 \Rightarrow F^3(v) = v.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 Seien $F, G\colon V \to V$ Endomorphismen eines K-Vektorraumes V.

(i) *Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, und sei $G(v) \neq 0$. Zeige, dass dann, $G(v)$ Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ ist.*

$$(G \circ F)(G(v)) = G((F \circ G)(v)) = G(\lambda v) = \lambda(G(v)).$$

(ii) *Angenommen, V ist endlich-dimensional. Zeige, dass dann $F \circ G$ und $G \circ F$ dieselben Eigenwerte haben.*

Da die Aussage symmetrisch ist, genügt es zu zeigen, dass jeder Eigenwert λ von $F \circ G$ auch ein Eigenwert von $G \circ F$ ist. Nach Teil (i) gilt dies bereits, wenn es einen Eigenvektor mit $G(v) \neq 0$ gibt.

Sei nun λ ein Eigenwert, sodass für jeden Eigenvektor v gilt, dass $G(v) = 0$. Dann ist $F(G(v)) = 0$ und somit $\lambda = 0$. Wir wollen zeigen, dass 0 auch ein Eigenwert von $G \circ F$ ist, das heißt, dass $\ker(G \circ F) \neq \{0\}$. Angenommen, der Kern ist Null, so ist $G \circ F$ injektiv und somit ein Isomorphismus, weil V endlich-dimensional ist. Dann ist G surjektiv, also ebenfalls bijektiv. Dann impliziert $G(v) = 0$ jedoch $v = 0$, ein Widerspruch, da v ein Eigenvektor ist. Also kann der Kern nicht Null sein und 0 ist ein Eigenwert von $G \circ F$.

(iii) *Finde ein Gegenbeispiel zu (ii) wenn V nicht endlich-dimensional ist.*

Sei $V = K^{\mathbb{N}}$ der unendlich dimensionale Vektorraum mit Basis $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Wir definieren

$$F\colon V \to V \qquad\qquad G\colon V \to V$$
$$(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots) \qquad\qquad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Dann ist $F \circ G$ die Identität, aber

$$G \circ F\colon V \to V$$
$$(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_2, x_3, \ldots).$$

Insbesondere ist 0 ein Eigenwert von $G \circ F$ mit Eigenvektor e_1 aber nicht von $F \circ G$.

Aufgabe 1.3 Wir betrachten die lineare Abbildung $F\colon \mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R}), \varphi \mapsto \varphi'$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, $\mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R})$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Abbildung $I \to \mathbb{R}$ ist, und φ' die Ableitung von φ ist.

(i) *Bestimme die reellen Eigenwerte von F.*

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\varphi = e^{\lambda x}$. Dann gilt $\varphi' = \lambda e^{\lambda x} = \lambda\varphi$. Somit ist jede reelle Zahl ein Eigenwert von F.

(ii) *Bestimme eine Basis von* $\mathrm{Eig}(F, 1)$.

Es gilt

$$\mathrm{Eig}(F, 1) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R}) \mid \varphi = \varphi'\}.$$

Aus Analysis ist bekannt, dass $\varphi = \varphi' \Rightarrow \varphi = ce^x$ mit $c \in \mathbb{R}$. Also ist $\{e^x\}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F, 1)$.

Aufgabe 1.4 ($*$ 10 Punkte) *Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen aus $M(3 \times 3; \mathbb{Q})$.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von A ist $P_A(t) = \det(A - t \cdot E_3)$. Wir berrechnen die Determinante mit der Regel von Sarrus und erhalten

$$\begin{aligned} P_A(t) &= (2-t)(2-t)(2-t) + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (2-t) \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \cdot (2-t) - (1-t) \cdot 1 \cdot 2 \\ &= -t^3 + 5t^2 - 2t - 8. \end{aligned}$$

Mit Nullstellenraten (z.B. $t = -1$), Polynomzerlegung und Mitternachts- oder p-q-Formel erhalten wir $P_A(t) = -(t+1)(t-2)(t-4)$. Das heißt, die Eigenwerte von A sind -1, 2 und 4. Wir bestimmen nun die jeweiligen Eigenräume.

- $\mathrm{Eig}(A, -1) = \ker(A + E_3)$.

$$A + E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir nutzen Zeilenumformung um das Gleichungssystem zu vereinfachen:

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 0\\ 0 & -8 & 0\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -8 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Nun können wir ablesen, dass $\mathrm{Eig}(A,-1) = \langle (1,0,-1)^t \rangle$.

- $\mathrm{Eig}(A,2) = \ker(A - 2E_3)$.

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

Wir nutzen erneut Zeilenumformung um das Gleichungssystem zu vereinfachen:

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Nun können wir das Gleichungssystem lösen: $x_1 = -x_3$ und $2x_2 = -3x_3$. Es folgt, dass $\mathrm{Eig}(A,2) = \langle (2,3,-2)^t \rangle$.

- $\mathrm{Eig}(A,4) = \ker(A - 4E_3)$.

$$A - 4E_3 = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Es gilt, dass $\mathrm{Eig}(A,4) = \langle (8,5,2)^t \rangle$.

Wir gehen ähnlich für B vor: $P_B(t) = \det(B - t \cdot E_3) = -t^3 + 3t^2 - 4 = -(t+1)(t-2)^2$. Das heißt, wir haben die Eigenwerte -1 und 2. Wir bestimmen die Eigenräume:

- $\mathrm{Eig}(B,-1) = \ker(B + E_3)$.

$$B + E_3 = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 7\\ 6 & 3 & -6\\ -4 & 0 & 7\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-4 & 0 & 7\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Es gilt, dass $\mathrm{Eig}(B,-1) = \langle (7,-6,4)^t \rangle$.

- $\mathrm{Eig}(B,2) = \ker(B - 2E_3)$.

$$B - 2E_3 = \begin{pmatrix}-7 & 0 & 7\\ 6 & 0 & -6\\ -4 & 0 & 4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem wird also durch $x_1 = x_3$ gelöst. Man beachte, dass jeder Wert für x_2 zulässig ist. Somit ergibt sich, dass $\mathrm{Eig}(B,2) = \langle (1,0,1)^t, (0,1,0)^t \rangle$.

Aufgabe 1.5 ($*$ 10 Punkte) *Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraumes. Zeige, dass $P_F(0) \neq 0$ genau dann, wenn F ein Isomorphismus ist.*

Es gilt $P_F(t) = \det(F - tE_{\dim V})$. Das heißt, $P_F(0) = \det(F)$ und $\det F \neq 0$ gilt genau dann wenn F ein Isomorphismus ist (weil V endlich-dimesnional).

Aufgabe 1.6 ($*$ 10 Punkte) *Sei $A \in M(n \times n; K)$ eine Matrix und $\Phi\colon M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)$ der Endomorphismismus, der durch $\Phi(B) = AB$ definiert ist. Zeige, dass für die charakteristischen Polynome von A und Φ gilt: $P_\Phi = (P_A)^n$.*

Wir schreiben Φ als Endomorphismus von K^{n^2}, wobei wir eine Matrix $M = (c_{ij})_{ij}$ als Vektor in K^{n^2} so darstellen, dass wir die einzelnen Spalten von M untereinander schreiben:

$$(c_{11}, \dots c_{n1}, c_{12}, \dots c_{n2}, \dots, c_{1n}, \dots c_{nn})^t.$$

Wir erinnern uns, dass die Matrixmultiplikation aus "Reihe" mal "Spalte" besteht, das heißt $\Phi(B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$. Führt man dies in K^{n^2} über, so kann man sehen, dass sich Φ als Matrix in $M(n^2 \times n^2; K)$ wie folgt darstellen lässt:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}$$

Es handelt sich also um eine diagonale Blockmatrix. Nun gilt $\det \Phi = det(A)^n$ und ebenso $P_\Phi = (P_A)^n$.