Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Musterlösung 2 Carl Foth

Aufgabe 2.1 ($*$ 10 Punkte) Sei $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ symmetrisch, d.h. es gelte $A = {}^tA$. Zeige, dass A diagonalisierbar ist.

Lösung Es gilt für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, dass

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - \lambda(a+c) + (ac - b^2).$$

Als Eigenwerte erhält man daher

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - ac + b^2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+2ac+c^2}{4} - \frac{4ac+4b^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\left(a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right) \end{aligned}$$

mit $(a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$, also $\sqrt{(a-c)^2+4b^2} \in \mathbb{R}$. Gilt $\lambda_1 = \lambda_2$, dann ist $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$; dann gilt $c = a$, $b = 0$ denn für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $r^2 > 0$ und damit

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist diagonalisierbar. Ansonsten sind je zwei Eigenvektoren w, v zum Eigenwert λ_1 bzw. λ_2 von A orthogonal und bilden daher eine Basis von $\mathbb{R}^2$:

$$\lambda_1 v^t w = v^t A w = ((v^t A w)^t)^t = ((Aw)^t v)^t = (w^t A^t v)^t = (w^t A v)^t = \lambda_2 (w^t v)^t = \lambda_2 v^t w$$

da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist also $v^t w = 0$. Eine Basis aus Eigenvektoren zu haben ist äquivalent dazu, diagonalisierbar zu sein.

Das Orthogonalität lineare Unabhängigkeit impliziert ist klar: Für $v, w \neq 0$ und daher $|v|, |w| \neq 0$

$$av + bw = 0 \Rightarrow a \underbrace{\frac{v^t v}{|v|}}_{=1} + b \underbrace{\frac{v^t w}{|v|}}_{=0} = 0 \Rightarrow a = 0, \quad \text{Symmetrie: } b = 0$$

Aufgabe 2.2 ($*$ 10 Punkte) Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? Begründe die Antwort.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung Wir berechnen das charakteristische Polynom von der ersten Matrix M_1: da sie in oberer Diagonalform ist, kann man es als Produkt der Diagonaleinträge ablesen:

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 0 & 4\\ 0 & 1-\lambda & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(5-\lambda)(2-\lambda)$$

Wir überprüfen die Dimension von $\mathrm{Eig}(M_1, 1)$:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2b+4d\\ b+3c+d\\ 5c\\ 2d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$$

Daher muss $d = 2d = 0$, $c = 5c = 0$, $a + 2b = a$ also $b = 0$ sein, also ist nur $(a, 0, 0, 0)^t \in \mathrm{Eig}(1)$. Damit ist die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 (nämlich $\dim \mathrm{Eig}(M_1, 1) = 1$) nicht die algebraische (nämlich n maximal sodass $P_M(\lambda) = (1-\lambda)^n P'(\lambda)$, also $n = 2$), und die Matrix M_1 nicht diagonalisierbar.

Für die Matix M_2 wurde bereits auf dem letzten Blatt das characteristische Polynom berechnet: dort hieß $M_2 = A$ und

$$P_{M_2}(\lambda) = -(t+\lambda)(\lambda-2)^2.$$

Ebenfalls wurden dort die Eigenräume berechnet: $\dim \mathrm{Eig}(M_2, 2) = 2$ und $\dim \mathrm{Eig}(M_2, 1) = 1$. Die geometrische und algebraische Vielfachheit stimmen also überein und die Matrrix ist diagonalisierbar.

Wir berechnen das characteristische Polynom (mit der Regel von Sarrus):

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda+2 & 1 & 2\\ -2 & -\lambda-2 & -6\\ 1 & 2 & -\lambda+5\end{pmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

Durch Nullstellenraten erhält man $\lambda_1 = 1$, und mit Polynomdivision sowie der binomischem Formel

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

also $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Wir berechnen die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M_2, 2)$:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & -6\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+b+2c\\ -2a-2b-6c\\ a+2b+5c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a\\ 2b\\ 2c\end{pmatrix}$$

also $b = -2c$, daher $a + c = 2a$, also $a = c$ indem man die ersten und letzten Einträge betrachtet. Der Eigenraum ist also 1-dimensional, was nicht der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts entspricht. Die Matrix M_3 ist also nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 2.3 Für welche reellen Zahlen a, b ist die Matrix

$$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 2a & b & a\\ 10 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

Lösung Wir berechnen das characteristische Polynom mit der Regel von Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix}-3-\lambda & 0 & 0\\ 2a & b-\lambda & a\\ 10 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} = -6b - \lambda^3 + b\lambda^2 - \lambda^2 + b\lambda + 6\lambda$$

und raten als Nullstelle $\lambda = b$ und erhalten mit Polynomdivision sowie der p-q-Formel

$$(\lambda-b)(\lambda^2+\lambda-6) = (b-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+3).$$

Für $b \neq 2, -3$ hat die Matrix drei unterschiedliche Eigenwerte, ist also diagonalisierbar. Für $b = 2, -3$ berechnen wir

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ 2ax + by + az \\ 10x + 2z \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} -3x \\ 2ax + 2y + az \\ 10x + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3x \\ 2ax - 3y + az \\ 10x + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall muss $x = 0$ und daher $az = 0$ sein, und y kann jeden beliebigen Wert annehmen. Falls $a \neq 0$ muss also $z = 0$ sein und die Dimension vom Eigenraum für $\lambda = 2$ ist also 1, was nicht der algebraischen entspricht. Ansonsten gilt $a = 0$ und z ist beliebig, also stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein. Im zweiten Fall muss $2x = -z$ wegen der mittleren Zeile gelten, und mit der letzten Zeile $y = z$. Also ist der Eigenraum von -3 maximal 1-dimensional. Die Matrix ist also diagonalisierbar für alle

$$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ und } a = 0,\, b = 2.$$

Aufgabe 2.4 ($*$ 10 Punkte) Diagonalisiere die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

aus $M(4 \times 4; \mathbb{R})$ simultan: bestimme eine Matrix $S \in GL_2(4; \mathbb{R})$, so dass SAS^{-1} und SBS^{-1} Diagonalmatrizen sind.

Lösung Wir diagonalisieren zunächst B und danach A auf den mehrdimensionalen Eigenräumen von B. Wir berechnen mit Laplace das charakteristische Polyniom von B durch Entwicklung nach der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} &= -(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -4 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(1-\lambda)(-\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2) \\ &= (1-\lambda)^2(\lambda^2 + 3\lambda + 2) \\ &= (1-\lambda)^2(\lambda + 2)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

wir berechnen die Eigenräume:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - c - 4d \\ -3a + b + 3c \\ 2a - c - 2d \\ a - c - 3d \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist also

$$\begin{pmatrix} 2a - c - 4d \\ -3a + b + 3c \\ 2a - c - 2d \\ a - c - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2a - c - 4d \\ -3a + b + 3c \\ 2a - c - 2d \\ a - c - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \\ -2c \\ -2d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2a - c - 4d \\ -3a + b + 3c \\ 2a - c - 2d \\ a - c - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix}$$

Aus Zeile 2 folgt $c = a$. Damit folgt aus Zeile 4: $d = 0$. Das führt zu keinem Widerspruch: $2a - a = a$. Wir erhalten also $v_1 = (0, b, 0, 0)^t$ sowie $v_2 = (a, 0, a, 0)^t$ als eine mögliche Basis.

Aus Zeile 1 folgt $4a - c - 4d = 0$, und aus Zeile 3: $2a + c - 2d = 0$. Subtraktion ergibt also $-3c = 0$. Damit ist mit Zeile 2: $a = b$ und mit Zeile 4: $a = d$. Wir erhalten also $v_3 = (a, a, 0, a)^t$

Aus Zeile 3 gilt $a = d$. Dann gilt mit Zeile 1: $c = -a$. Mit Zeile 2 daher $b = 3a$. Dies ergibt keinen Widerspruch mit Zeile 4, denn $a - (-a) - 3a = -a$. Wir erhalten also $v_4 = (a, 3a, -a, a)^t$

Nun diagonalisieren wir A bezüglich $\langle v_1, v_2 \rangle$:

$$A(v_1+v_2) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a+b+6a \\ -12a+2b+12a \\ a+b \\ -4a+4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2b \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Indem wir $a = b$ wählen erhalten wir zwei linear unabhängige Basisvektoren für die Eigenräume von A. Die restlichen beiden Vektoren sind schon Eigenvektoren von A nach Aufgabe 2.5, und insgesamt linear unabhängig, also sind wir fertig. Wir erhalten als gemeinsame Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen das Inverse von S^{-1} mit zum Beispiel dem Gauß-Jordan-Algorithmus als

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.5 ($*$ 10 Punkte) Seien K ein Körper und seien $A, B \in M(n \times n; K)$ kommutierende Matrizen, die nicht notwendig diagonalisierbar sein müssen. Für jeden Eigenwert von A sei der zugehörige Eigenraum 1-dimensional. Zeige, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von B ist.

Lösung Sei $v \neq 0$ ein Eigenvektor von A bezüglich $\lambda \in K$. Dann gilt per Annahme

$$ABv = BAv = \lambda Bv.$$

Ist nun $Bv = 0$ so ist $0 \neq v \in \operatorname{Eig}(B, 0)$ ein Eigenvektor von B bezüglich des Eigenwerts 0. Ansonsten ist Bv ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, und da per Annahme $\dim \operatorname{Eig}(A, \lambda) = 1$ gilt, sind Bv und v linear abhängig, d.h. es gibt ein $\mu \in K$ sodass $Bv = \mu v$ ist. Also ist $0 \neq v \in \operatorname{Eig}(B, \mu)$.

Aufgabe 2.6 Seien $A, B \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ mit charakteristischen Polynomen $P_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ und $P_B(t) = -t^3 + 7t^2 - 9t + 3$. Zeige, dass der Kern von AB 1-dimensional ist.

Lösung Wir berechnen die Nullstellen der Polynome:

$$P_A(t) = t(-t^2 + 2t - 1) = -t(t-1)^2$$

und durch Nullstellenraten $t_1 = 1$ und Polynomdivision sowie die binomische Formel

$$P_B(t) = (t-1)(-t^2 + 6t - 3) = -(t-1)(t - (3 - \sqrt{6}))(t - (3 + \sqrt{6})).$$

Damit hat B drei verschiedene Eigenwerte ungleich 0 und ist damit injektiv ($\dim \ker B = \dim \operatorname{Eig}(\mathrm{B}, 0) = 0$). Also hat B trivialen Kern und es gilt:

$$\dim \ker AB = \dim \ker A,$$

und da die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ kleiner als seine algebraische (hier m_λ) ist, gilt

$$\dim \ker A \leq 1 = m_0.$$

Da 0 ein Eigenwert von A ist, da $P_A(0) = 0$, ist die Dimension auch mindestens 1.