0.1 Beispiele für Integrationstechniken

Die Substitutionsregel

Aus der Kettenregel

$$f(\phi(x))' = f'(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$$

folgt, daß $f(\phi(x))$ eine Stammfunktion von $f'(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$ ist. D.h.

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = F(\phi(x)) + C$$

wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Dies ist die sogenannte Substitutionsregel. Speziell gilt für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = F(\phi(x))|_a^b = F(\phi(a)) - F(\phi(b)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) dy$$

Algorithmus: Will man das unbestimmte Integral

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx$$

lösen, so bildet man

$$u = \phi(x)$$

und

$$du = \phi'(x) dx$$

dann ist:

$$\int f(u) du = \int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx$$

Wir bestimmen also eine Stammfunktion $F(u)$ für $f(u)$ und erhalten:

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = F(\phi(x))$$

Beispiel 1: $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$

Wir wählen $\phi(x) := x^3$. Es ist $\phi'(x) = 3x^2$. Also ist

$$\int x^2 \cdot e^{x^3} = \frac{1}{3} \int \phi'(x) \cdot e^{\phi(x)} dx = \frac{1}{3} \int e^u du =$$

$$\frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

Kurzschreibweise:

$$u = x^3$$

$$du = 3x^2 dx$$
$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int x^2 \cdot e^{x^3} dx = \int x^2 \cdot e^u \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

Probe: $\left[\frac{1}{3} e^{x^3} + C\right]' = \frac{1}{3} e^{x^3} \cdot 3x^2 = x^2 \cdot e^{x^3}$

Beispiel 2: $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Wähle $u = \phi(x) = \sqrt{x}$. Dann ist $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$u = \sqrt{x}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$dx = 2\sqrt{x} du$$

$$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2^u}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} du = 2 \int 2^u du$$

Stammfunktion für 2^x:

$$2^x = e^{x \ln 2}$$

$$\int e^{x \ln 2} = \frac{e^{x \ln 2}}{\ln 2} + C = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Daher gilt:

$$2 \int 2^u du = \frac{2^{u+1}}{\ln 2} + C = \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C$$

Probe: $\left[\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C\right]' = \left[\frac{1}{\ln 2} e^{(\sqrt{x}+1) \cdot \ln(2)}\right]' = \frac{1}{\ln(2)} e^{(\sqrt{x}+1) \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2^{\sqrt{x}} \cdot 2}{2\sqrt{x}} = \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

Beispiel 3: $\int \cos(x) e^{2 \cdot sin(x)} dx$

$$u = 2 \cdot \sin(x)$$

$$du = 2\cos(x) dx$$
$$dx = \frac{1}{2\cos(x)} du$$

$$\int \cos(x) e^{2 \cdot sin(x)} dx = \int \cos(x) e^u \frac{1}{2\cos(x)} du = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{2\sin(x)} + C$$

Die partielle Integration

Aus der Produktregel $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ folgt:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx$$

oder

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

oder küurzer, falls H eine Stammfunktion von $f(x)g'(x)$ ist:

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x)g(x) - H(x)$$

speziell gilt für bestimme Integrale gilt:

$$\int_b^b f'(x) \cdot g(x)dx$$

$$= f(b)g(b) - H(b) - [f(a)g(a) - H(a)]$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - [H(b) - H(a)]$$

$$= f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Beispiel 4: $\int \sin(x)^2 dx$

Wir setzen:

$$f'(x) = \sin(x) \;\Rightarrow\; f(x) = -\cos(x)$$

und

$$g(x) = \sin(x) \;\Rightarrow\; g'(x) = \cos(x)$$

Also

$$\int \sin(x)^2 dx = -\cos(x)\sin(x) +$$

$$\int \cos(x)^2 dx = \cos(x)\sin(x) + \int 1 - \sin(x)^2 dx$$

Daher gilt:

$$\int \sin(x)^2 dx = \frac{1}{2}\left[x - \cos(x)\sin(x)\right]$$

Beispiel 5: Die Funktion $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(X)}$ hat auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die Umkehrfunktion $\arctan(x)$.

Die Ableitung von $\tan(x)$ ist nach der Quotientenregel:

$$\tan(x)' = \frac{\cos(x)^2 + sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + tan(x)^2$$

Mit der Kettenregel folgt aus

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

die Ableitung von $\arctan(x)$:

$$(1 + \tan(\arctan(x))^2) \cdot \arctan(x)' = 1$$

also

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Damit berechnen wir

$$\int \arctan(x)dx = \int 1 \cdot \arctan(x)dx$$

Wir setzen

$$f'(x) = 1 \ \Rightarrow \ f(x) = x$$

$$g(x) = \arctan(x) \ \Rightarrow \ g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Daher ist

$$\int 1 \cdot \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

Das letzte Integral können wir wieder über Substitution lösen:

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$u := 1 + x^2$$

$$du = 2xdx$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{u} \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du =$$

$$\frac{1}{2}\ln(u) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Insgesamt also

$$\int \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Probe: $\left[x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\right]' = 1 \cdot \arctan(x) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \arctan(x)$

Bemerkung: Durch dieses Beispiel wissen wir auch:

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

Beispiel 6: $\int \ln(x)dx$

Der gleiche Trick wie bei $\arctan(x)$ liefert:

$$\int 1 \cdot \ln(x)dx$$

$$f'(x) = 1 \;\Rightarrow\; f(x) = x$$

$$g(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \cdot \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

Probe: $[x \cdot \ln(x) - x + C]' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

Beispiel 7: Es ist $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right]$

Daher gilt:

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b} \ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right) + C$$

Beispiel 8:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx$$

Es ist

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)^2}dx = \int \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)^2}dx$$

Substitution:

$$u = \cos(x)$$

$$du = -\sin(x)dx$$

daher:

$$\int \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)^2}dx = -\int \frac{1}{1-u^2}du$$

Zwischenrechnung:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right]$$

daher:

$$\int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2}\left[\ln(1+u) - \ln(1-u)\right]$$

für

$$-1 \leq u \leq 1$$

Fazit:

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = -\int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2}\left[\ln(1-\cos(x)) - \ln(1+\cos(x))\right]$$

Hinweis: In Maxima lautet der Befehl für die Integration: integrate(Ausdruck,Variable)

Beispiele:

$$integrate(1/((x-a)*(x-b)),x) \quad = \quad \frac{\log(x-b)}{b-a} - \frac{\log(x-a)}{b-a}$$

Die Auswertung von bestimmten Integralen geschieht durch den Befehl integrate(Ausdruck,Variable,untere Grenze,obere Grenze)

Beispiel:

$$integrate(1/x,x,1,2) \quad = \quad \log(2)$$