0.1 E: Der Haupsatz der Mineralogie

Satz: In einem Kristall gibt es nur 1,2,3,4 und 6-zählige Symmetrien.

Definition: Seien $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ zwei Vektoren, die nicht auf einer Geraden liegen. Die Menge

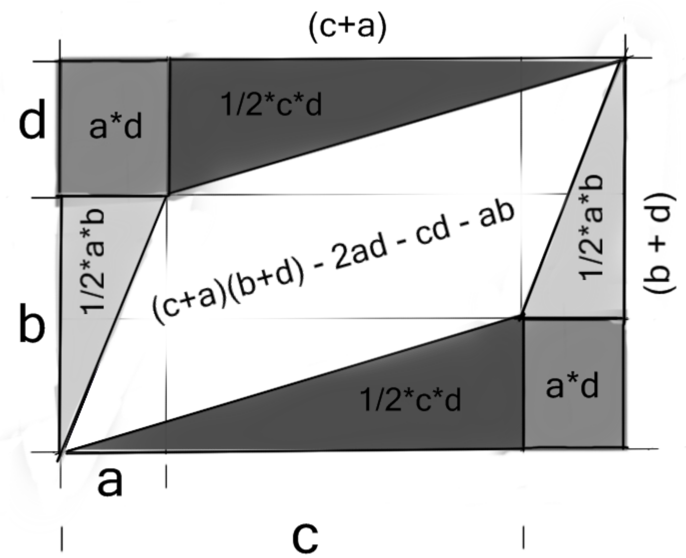
$$G := \{p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$$

heißt Gitter.

Satz: Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ liegen genau dann nicht auf einer Geragen, wenn gilt:

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$$

Grund: Wir betrachten die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$



Es ist:

$$(a+c)(b+d) - 2ad - cd - ab = ab + ad + bc + cd - 2ad - cd - ab$$

$$= bc - ad = -(ad - bc)$$

Vertauschen der Reihenfolge ändert nur das Vorzeichen. Die Größe $ad - bc$ ist also (bis auf das Vorzeichen) die Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallellogramms. Diese Fläche ist genau dann Null, wenn die beiden Vektoren auf einer Geraden liegen.

Definition: Für ein Gitter G ist eine $n-$fache Symmetrie eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$, welche das Gitter wieder in das Gitter abbildet.

Erinnerung Eine $2 \times 2-$Matrix ist ein quadratisches Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit Zahlen a, b, c, d.

Die Matrix-Vektor-Multiplikation is definiert durch:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Ist $B = (\vec{b}_1|\vec{b}_2)$ die Matrix, die aus den Spalten $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ besteht, so ist die Matrix-Matrix-Multiplikation definiert als:

$$A \cdot B = A \cdot (\vec{b}_1|\vec{b}_2) := (A \cdot \vec{b}_1|A \cdot \vec{b}_2)$$

Die Matrix-Matrix-Multiplikation ist assoziativ und das Neutralement der Matrix-Matrix-Multiplikation ist

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Inverse einer Matrix A (bzgl. Matrix-Matrix-Multiplikation) wird (falls es existiert) mit A^{-1} bezeichnet. Es ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

falls $ad - bc \neq 0$.

Erinnerung: Die folgende Matrix D_φ dreht einen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Grund: Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}$ (Polarkoordinaten)

Dann ist:

$$D_\varphi \cdot \vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

(die letzte Gleichung sind die Additionstheoreme für sin und cos)

Offenbar gilt: $D_{-\varphi} = D_\varphi^{-1}$.

Die Spur eine Matrix ist definiert als:

$$\text{Spur}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + d$$

Es gilt : Spur(AB) =Spur(BA), denn

$$\text{Spur}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}) = ae + bg + cf + dh$$

$$\mathrm{Spur}(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ea + fc + gb + hd$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

aber die Spuren der beiden Matrizen sind gleich.

Definition Eine Drehsymmetrie eines Gitters ist eine Drehung, die Gitterpunkte wieder auf das Gitter abbildet.

Es muß also für eine Drehsymmetrie des Gitters gelten: Für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt es $r, s \in \mathbb{Z}$, mit:

$$D_\varphi(p\vec{u} + q\vec{v}) = r\vec{u} + s\vec{v}$$

Ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, so muß es $r_i, s_i \in \mathbb{Z}$ geben, mit

$$D_\varphi \vec{u} = r_1\vec{u} + s_1\vec{v}$$
$$D_\varphi \vec{v} = r_2\vec{u} + s_2\vec{v}$$

Für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sei $(\vec{a}|\vec{b})$ die Matrix mit den Spalten $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das obige ist gleichbedeutend mit:

$$D_\varphi\,(\vec{u}|\vec{v}) = (r_1\vec{u} + s_1\vec{v}|r_2\vec{u} + s_2\vec{v}) = \begin{pmatrix} r_1u_1 + s_1v_1 & r_2u_1 + s_2v_1 \\ r_1u_2 + s_1v_2 & r_2u_2 + s_2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$$

also

$$D_\varphi \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir den ersten und den letzten Ausdruck von links mit $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1}$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{u_1v_2 - v_1u_2} \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$$

Nun gilt mit $A := \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_1 & v_2 \end{pmatrix}$:

$$\mathrm{Spur}\left(A^{-1} \cdot D_\varphi \cdot A\right)$$

$$= \mathrm{Spur}\left(D_\varphi \cdot A \cdot A^{-1}\right)$$

$$= \text{Spur}\left(\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\right) = 2\cos\varphi$$

Aber die Spur der Matrix $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$ ist $r_1 + s_2 \in \mathbb{Z}$, also ganzzahlig. Die Frage ist also, wann $2\cos\varphi$ ganzzahlig ist.
Da gilt

$$-1 \leq \cos\phi \leq 1$$

ist

$$-2 \leq 2\cos\phi \leq 2$$

Die ganzen Zahlen in diesem Bereich sind:

$$2\cos\varphi \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Wir benötigen also die Winkel für $\cos\phi \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$. Dabei interessieren wir uns nur für die Winkel $\varphi \in [0, \pi]$.
Für $n > 6$ ist $\frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{3}$. Da der Kosinus im Bereich $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist, gilt:

$$\cos(\frac{2\pi}{n}) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

insgesamt also:

$$\frac{1}{2} < \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) < 1$$

Tabellarisch gilt für n:

n	$\frac{360}{n}$	$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$
1	360	1
2	180	-1
3	120	$-\frac{1}{2}$
4	90	0
5	73	≈ 0.31
6	60	$\frac{1}{2}$
$n > 6$	< 60	$> \frac{1}{2}$

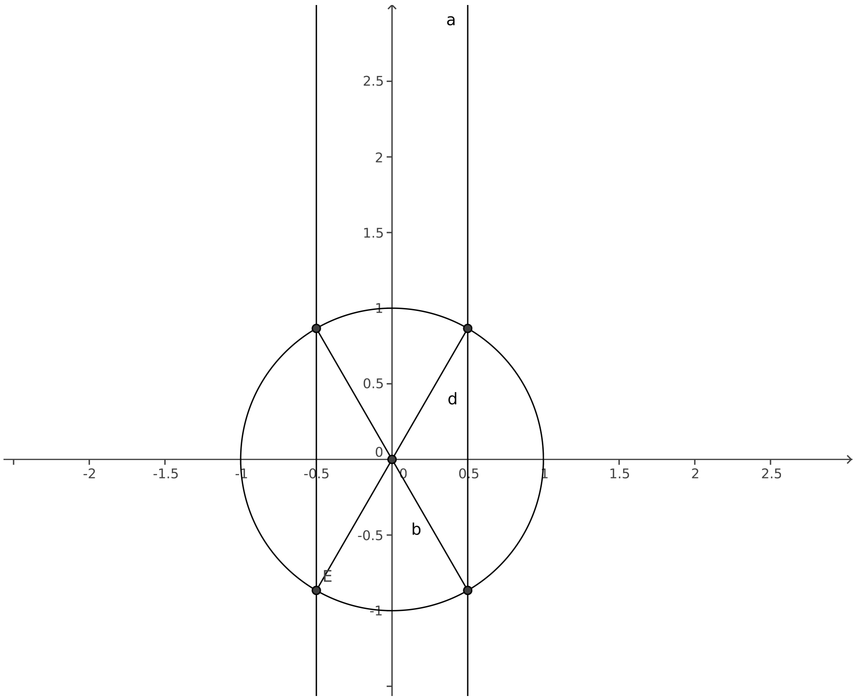
Bemerkung zur genauen Konstruktion der Winkel:

Zum Punkt $(1,0)$ gibt es genau einen Punkt (x_0, y_0). der auf dem Einheitskreis oberhalb der $x-$Achse liegt und vom Punkt $(1,0)$ den Abstand 1 hat. Diese beiden Punkte bilden, zusammen mit dem Ursprung ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1. Also halbiert die Projektion des Punktes auf die $x-$Achse das Intervall $[0,1]$. Somit gilt $x_0 = \cos(\phi) = \frac{1}{2}$.

Der Punkt $(-\frac{1}{2}, y_0)$ hat vom Punkt (x_0, y_0) ebenfalls den Abstand 1. Es gilt $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (y_0 - y_0)^2 = 1$. Wir haben also in den oberen Halbkreis drei solche Dreiecken eingeschrieben, was für den Vollkreis sechs Dreiecke bedeutet. Der Winkel φ ist also $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ (6-fache Symmetrie) .

Eine ähnlich Konstruktion vom Punkt $(-1,0)$ aus liefert für $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ den Winkel $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ (3-fache Symmetrie) .

$\cos(\varphi) = 0$ liefert die Winkel $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$ (4-fache Symmetrie) und $\phi = \frac{3\pi}{2}$ (zu groß).
$\cos(\phi) = \pm 1$ gibt noch die Winkel $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ (2-fache Symmetrie).



Die Unmöglichkeit für $n = 5$ erhalt man aus

$$\frac{2\pi}{6} < \frac{2\pi}{5} < \frac{2\pi}{4}$$

und der Monotonie des Kosinus:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} > \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$