## 0.1 GPS und Verwandte

### 0.1.1 2D

Die eigenen (zu ermittelnden) Koordinaten seien $x$ und $y$. Zwei Signale gehen von dem Ort $(x, y)$ mit den Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ zum Zeitpunkt $t_1$ und $t_2$ aus. An den Orten $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ kommen Sie zu den Zeitpunkten $t_1 + \Delta t_1$ und $t_2 + \Delta t_2$ an. Symmetrisch dazu ist die Situation, daß die Signale von $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ ausgehen und bei $(x, y)$ ankommen.

Die Entfernung von $(x, y)$ zu $(x_i, y_i)$ ist $\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$ .

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (\Delta t_1 \cdot v_1)^2$$
$$\wedge\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (\Delta t_2 \cdot v_2)^2$$

Dies sind also zwei Kreise in der Ebene, die sich schneiden müssen. Die Aufgabe ist es also ein Gleichungssystem der Form

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = b_1 \ \wedge\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = b_2\ (*).$$

zu lösen. Nun ist es schwierig, ein nicht lineares Gleichungssystem zu lösen (das ist Gegenstand aktueller Forschung). Glücklicherweise hat das Gleichungssystem (*) eine spezielle Gestalt, die wir ausnutzen können. Ausmultipliziert lautet es:

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = b_1 \ \wedge$$
$$x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 = b_2$$

**Lemma:** Ist

$$f(x, y) = b_1, g(x, y) = b_2$$

ein Gleichungssystem, so hat das Gleichungssystem

$$f(x, y) = b_1,\ f(x, y) - g(x, y) = b_1 - b_2$$

die gleiche Lösungsmenge.

**Grund:** Sei $(a, b)$ eine Lösung des ersten System, dann ist auch sicher eine Lösung des zweiten Systems.

Ist umgekehrt $(a, b)$ eine Lösung des zweiten Systems, so gilt $f(a, b) = b_1$ und

$$f(a, b) - g(a, b) = b_1 - b_2$$

Also:

$$g(a, b) = b_2$$

womit $(a, b)$ auch das erste Gleichungssystem löst.

Angewandt auf das Gleichungssystem (*) bekommen wir:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_2)^2 = b_1 \ \wedge$$

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = b_1 - b_2$$

Die zweite Gleichung ist also eine Gleichung des Typs $ax + by = c$, also ohne höhere Potenzen von $x$ oder $y$. Wir können nun diese zweite Gleichung nach $y$ auflösen (falls$y_2 - y_1 \neq 0$), wobei wir zur Abkürzung $\Delta y := y_2 - y_1$, $\Delta x := x_2 - x_1$ , $\Delta b = b_1 - b_2 = (\Delta t_1 v_1)^2 - (\Delta t_2 v_2)^2$ und $\Delta := x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2$ verwenden). Dann ist

$$y = \frac{\Delta b - \Delta}{2\Delta y} - x\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Wir nehmen die neuen Abkürzungen $c = \frac{\Delta b - \Delta}{2\Delta y}$ und $d = -\frac{\Delta x}{\Delta y}$, also ist $y = c + dx$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert:

$$(x - x_1)^2 + ((c + dx) - y_1)^2 = b_1$$

also

$${x_1}^2 - 2\,x\,x_1 + d^2\,x^2 + x^2 + 2\,c\,d\,x - 2\,y_1\,d\,x + c^2 - 2\,y_1\,c + y_1^2 = b_1$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in $x$, läßt sich also mit der $p, q-$Formel lösen:

$$x = -\frac{\sqrt{-{y_1}^2 + (2\,d\,x_1 + 2\,c)\;y_1 - d^2\,{x_1}^2 - 2\,c\,d\,x_1 + b_1\,d^2 - c^2 + b_1} - d\,y_1 - x_1 + c\,d}{d^2 + 1}$$

$$x = \frac{\sqrt{-{y_1}^2 + (2\,d\,x_1 + 2\,c)\;y_1 - d^2\,{x_1}^2 - 2\,c\,d\,x_1 + b_1\,d^2 - c^2 + b_1} + d\,y_1 + x_1 - c\,d}{d^2 + 1}$$

Das sieht kompliziert aus, läßt sich aber von einer Maschine leicht berechnen. Allgemein gilt, daß man hier zwei Lösungen bekommt. In der Praxis spielt das jedoch u.U. keine Rolle (s.u.).

**1. Anwendung: Blitz und Donner** Bei einem Blitz breiten sich zwei Signale nämlich Licht und Schall mit sehr unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus. In unserem obigen Problem ist also $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Wir wollen normalerweise auch nicht den genauen Ort des Blitzes wissen, sondern nur seine Entfernung $d$. Da sich in guter Näherung Lichtsignale von Blitzen unendlich schnell ausbreiten, können wir die Anzahl der Sekunden zählen, die nach dem Blitz vergehen bis der Donner zu hören ist. Der Abstand ist also ziemlich genau $d = \Delta t \cdot v$, wobei $v$ die Schallgeschwindigkeit (ca. 343 m/s) ist.

**2. Anwendung: Epizentrumsbestimmung:** Ein Erdbeben schickt $P-$ und $S-$Wellen aus, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten $v_p$ und $v_S$ ausbreiten. Für die Koordinaten eines oberflächennahen Bebens $(x, y)$ muß gelten:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = (\Delta t_{p,i} \cdot v_P)^2,$$

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = (\Delta t_{S,i} v_S)^2$$

Dabei sind $(x_i, y_i)$ die Koordinaten von seismologischen Stationen und $\Delta t_{P,i}$ und $\Delta t_{S,i}$ die Laufzeit der $P-$ und $S-$Wellen zu den Stationen. Das Problem hierbei ist, daß wir nur die Differenz der Laufzeiten $\Delta t_{P,i} - \Delta t_{S,i}$ kennen (die Seismometer zeigen ja nur den Eintreffzeitpunkt $t_0 + \Delta t$ auf, wobei $t_0$ der Zeitpunkt der Eruption ist), nicht aber die Laufzeiten selbst. Nun müssen aber die Wellen beim Antreffen den gleichen Weg zurückgelegt haben, also gilt:

$$\Delta t_{P,i} \cdot v_p = \Delta t_{S,i} \cdot v_S \ (*)$$

also

$$1 - \frac{\Delta t_{P,i}}{\Delta t_{S,i}} = 1 - \frac{v_S}{v_P}$$

Daher haben wir

$$\Delta t_{S,i} - \Delta t_{P,i} = \Delta t_{S,i} \left(1 - \frac{v_S}{v_P}\right)$$

und schließlich

$$\Delta t_{S,i} = \frac{\Delta t_{S,i} - \Delta t_{P,i}}{\left(1 - \frac{v_S}{v_P}\right)}$$

Zwar unterscheiden sich die Geschwindigkeiten der $P-$ und $S-$Wellen weltweit erheblich, aber das Verhältnis $\frac{v_S}{v_P}$ ist sehr ähnlich und bekannt. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen also nur bekannte Größen. Allerdings kann man bei zwei Stationen auch $v_S$ und $v_P$ direkt bestimmen: Aus den beiden Gleichungen (*) folgt:

$$v_P = \frac{\Delta t_{S,1} - \Delta t_{S,2}}{\Delta t_{P,1} - \Delta t_{P,2}} v_S$$

Setzt man das in die erste Gleichung ein, so erhält man : $\Delta t_{P,1} \cdot \left(\frac{\Delta t_{S,1} - \Delta t_{S,2}}{\Delta t_{P,1} - \Delta t_{P,2}} v_S\right) = \Delta t_{S,1} \cdot v_S$, woraus man $v_S$ berechnen kann.

Insgesamt erhalten wir:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = (\Delta t_{S,i} v_S)^2$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich wieder wie oben lösen. Häufig wird klar sein, welche dieser beiden Lösungen die gesuchte ist, z.B. weil der zweite Punkt nicht in einem Erdbebengebiet liegt. Will man Sicherheit haben, so nimmt man eine dritte seismologische Station $(x_3, y_3)$ hinzu. Man berechnet die Entfernung der beiden Lösungen zu $(x_3, y_3)$ und berechnet, welche der Lösungen besser mit der beobachteten Laufzeit zu $(x_3, y_3)$ übereinstimmt.

**3. Anwendung: Ortsbestimmung mit Mobilfunkstationen:** Zur Ortsbestimmung mit dem Handy wird das folgende Verfahren benutzt. Jede Funkzelle hat einen gewissen Durchmesser und eine eindeutige Kennung. Das Handy kennt also die ungefähre Entfernung zu einem Mobilfunkmasten, deren Positionen in einer Datenbank abgelegt sind. Zur genaueren Positionsangabe kann das Handy die Feldstärke und damit den Abstand zu Mobilfunkmasten messen. Das entsprechende Gleichungssystem wird (wie oben) gelöst und das Handy kann seinen Standort ermitteln. Diese Methode ist allerdings recht ungenau. In den letzten Jahren sind die Handybetreiber (und auch Apple und Google) für die Ortsbestimmung die Position von WLAN-Netzen zu bestimmen und in einer Datenbank zu speichern, was eine genauere Ortsbestimmung erlaubt (wegen der geringeren Reichweite von WLAN).

**4. Anwendung: Ortsbestimmung auf der Erde und GPS:** Wir machen uns zunächst einmal klar, wie man prinzipiell seine Position auf der Welt ermitteln kann. Zunächst einmal steht am Nordhimmel der Polarstern ziemlich genau im Norden. Man kann nun den Winkel zwischen Horizont und Polarstern messen. Nimmt die Entfernung des Sterns von der Erde als unendlich an (Was beim Vergleich von Erdumfang und Sternentfernung eine ziemlich gute Näherung darstellt). So würde der Polarstern vom Äquator aus gesehen genau am Horizont sein und vom Nordpol aus gesehen im Zenit. Die geographische Breite ist also gleich diesem Winkel. Die geographische Länge ist schwieriger zu bestimmen. Die Erde dreht sich einmal in 24 Stunden um $360^o$, also pro Stunde um $15^o$. Hat man nun eine Uhr, die die genaue Zeit in Greenich bei London anzeigt (Position des Nullten Längengrads), so kann man den genauen Zeitpunkt des Mittags nach dieser Uhr ermitteln. Der lokale Mittag ist der Zeitpunkt des Höchststandes der Sonne. Tritt zum Beispiel der lokale Mittag 6 Stunden vor dem Mittag in Greenich ein, so befindet man sich in $6 \cdot 15 = 75$ Grad westlicher geographischer Länge, was übrigens auch die 6 Stunden Zeitunterschied zur amerikanischen Ostküste erklärt.

Bei GPS wird folgendes gemacht. Jeder Satellit strahlt in regelmäßigen Abständen ein Signal aus, welches die folgenden Daten enthält: Seine Position $(x_i, y_i, z_i)$ und den genauen Zeitpunkt der Austrahlung $t_i$. Ein GPS Empfänger kann nun mit der Formel

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = ((t_i^E - t_i) \cdot c)^2$$

seine Entfernung $d_i$ vom Satelliten bestimmen, dabei ist $t_i^E$ der Zeitpunkt des Eintreffens des Signals und $c$ die Lichtgeschwindigkeit. Der GPS Empfänger sendet also kein eigenes Signal aus. Nun ist die Lichtgeschwindigkeit sehr schnell, so daß die Zeitmessung von $t$ und $t_i$ sehr genau sein muß. In den Satelliten sind dafür Atomuhren untergebracht. Nun kann man aber nicht in jedem GPS-Empfänger eine Atomuhr unterbringen. Dabei hilft der folgende Trick. Die Uhr im GPS-Empfänger geht falsch um die Zeit $\Delta t$, es wird also nicht $t$ gemessen, sondern $t + \Delta t$.

Wir betrachten das folgende Gleichungssystem mit den Unbekannten $x, y, z$ und $\Delta t$ für i=1,2,3,4:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = \left(t_i^E + \Delta t - t_i\right)^2 c^2$$

Ziehen wir die erste Gleichung von den anderen drei Gleichungen ab, so erhalten wir exemplarisch für die zweite Gleichung:

$$\begin{gathered} x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 + \\ 2\left[x(x_2 - x_1) + y(y_2 - y_1) + z(z_2 - z_1)\right] = \\ = \left[(t_2^E - t_2)^2 - (t_1^E - t_1)^2 + 2\Delta t((t_2^E + t_2) - (t_1^E + t_2))\right] c^2 \end{gathered}$$

Setzen wir $-A_2 := x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 - (t_2^E - t_2)^2 - (t_1^E - t_1)^2$, so gilt mit $T_i := t_i^E + t_i :$

$$\begin{gathered} 2\left[x(x_2 - x_1) + y(y_2 - y_1) + z(z_2 - z_1)\right] = \\ 2\Delta t(T_2 - T_1)c^2 + A_2 \end{gathered}$$

Machen wir das für die anderen Gleichungen, so bekommen wir

$$\begin{aligned} 2\left[x(x_2 - x_1) + y(y_2 - y_1) + z(z_2 - z_1)\right] &= 2\Delta t(T_2 - T_1)c^2 + A_2 \\ 2\left[x(x_3 - x_1) + y(y_3 - y_1) + z(z_3 - z_1)\right] &= 2\Delta t(T_3 - T_1)c^2 + A_3 \\ 2\left[x(x_4 - x_1) + y(y_2 - y_1) + z(z_4 - z_1)\right] &= 2\Delta t(T_4 - T_1)c^2 + A_4 \end{aligned}$$

**Anleihe aus der Theorie linearer** $3 \times 3-$ **Systeme:** Das lineare Gleichungssystem

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i$$

für $i = 1, 2, 3$ hat die eindeutige Lösung

$$x = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \ y = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix}, \ z = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

mit $D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, falls $D \neq 0$. Dabei ist der Betrag der Determinante das Volumen des von den drei Spaltenvektoren aufgespannten Parallelepipeds.

Sie ist also genau dann 0, wenn sich die drei Spaltenvektoren in einer Ebene befinden.

Damit können wir $x, y$ und $z$ durch Ausdrücke ersetzen, die nur noch $\Delta t$ enthalten (neben bekannter Größen). Die können wir wieder in die erste Gleichung einsetzen und erhalten einen quadratische Gleichung für $\Delta t$. det $D \neq 0$ ist bei GPS durch die Wahl der Satellitenorbits sichergestellt: Niemals befinden sich vier in Sichweite befindlichen Satelliten in einer Ebene. Denn

$$det \begin{pmatrix} 2\left(x_2 - x_1\right) & 2\left(y_2 - y_1\right) & 2\left(z_2 - z_1\right) \\ 2\left(x_3 - x_1\right) & 2\left(y_3 - y_1\right) & 2\left(z_3 - z_1\right) \\ 2\left(x_4 - x_1\right) & 2\left(y_4 - y_1\right) & 2\left(z_4 - z_1\right) \end{pmatrix}$$

ist genau dann Null, die Verbindungvektoren von Satellit 1 und den anderen drei Satelliten alle in einer Ebene liegen, also wenn alle vier Satelliten in einer Ebene liegen.