Kombinatorik - die gepflegte Kunst des Zählens

Definition: Für eine Menge M bezeichne $\#M$ die Anzahl ihrer Elemente

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich endliche Mengen, also Mengen M mit $\#M < \infty$.

Lemma: Ist $M \cap N = \emptyset$, so gilt:

$$\#(M \cup N) = \#M + \#N$$

Satz: $\#(M \cup N) = \#M + \#N - \#(M \cap N)$

Grund: Es ist $M \cup N = [M \backslash (M \cap N)] \cup (M \cap N) \cup [N \backslash (M \cap N)]$ und die an der Vereinigung beteiligten Mengen haben kein Element gemeinsam.

Wegen $\#M \backslash (M \cap N) = \#M - \#(M \cap N)$ gilt:

$$\#(M \cup N) = \#M - \#(M \cap N) + \#(M \cap N) + \#N - \#(M \cap N) = \#M + \#N - \#(M \cap N)$$

Definition: Paare sind Mengen der Form

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Satz: $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ gilt genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt.

Grund: Übung

Definition: Wir schreiben ein Paar auch als (a, b). Man beachte, daß i.a. $(a, b) \neq (b, a)$ gilt.

Definition: Das Kreuzprodukt zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Beispiel: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$

$A \times B = \{(1.x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$

Satz: $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$

Allgemeiner kann man nicht nur Paare sondern auch $n-$Tupel definieren:

Definition: 1) Sind $M_1, \ldots, M_n \neq \emptyset$ Mengen, so ist

$$M_1 \times \ldots \times M_n := \{(m_1, \ldots, m_2) | m_1 \in M_1, \ldots, m_n \in M_n\}$$

die Menge aller $n-$Tupel mit Elementen aus $M_1, \ldots, M_n$.

2) Für die Menge $B = \{0, 1\}$ definieren wir

$$B^n := B \times \ldots \times B \ (n - \text{mal})$$

Die Anzahl der Elemente von B^n ist also 2^n. B^n heißt auch die Menge der binären $n-$Tupel.

Satz: Jede $n-$elementige Menge hat genau 2^n Teilmengen.

Grund: Wir ordnen die n Elemente von M in irgendeiner Weise an:

$$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$$

Einer Teilmenge M' von M ordnen wir wie folgt ein binäres $n-$Tupel zu: an der $i-$ten Position steht eine 1, falls $m_i \in M$ und eine 0, falls $m_i \notin M$.

Umgekehrt beschreibt jedes solche $n-$Tupel eine Teilmenge von M. Es gibt also genauso viele Teilmengen wie binäre $n-$Tupel. $\square$

Wir hatten die Binomialkoeffizienten wie folgt definiert

$$(1+x)^n =: \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Wegen

$$(1+x)^n = (1+x) \cdot \ldots \cdot (1+x)$$

Wird die rechte Seite nach dem Distributivgesetz ausmultipliziert, so ist die Zahl vor x^k die Anzahl, wie oft man genau $k-$ mal ein x aus Faktoren auswählen kann. Dies entspricht der Anzahl der binären $n-$Tupel, die genau k viele Einsen haben. Dies entspricht aber (s.o.) genau den $k-$elementigen Teilmengen der $n-$elementigen Menge M.

Satz: Die Anzahl der $k-$elementigen Teilmengen einer $n-$elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

Folgerung:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Beispiel: Beim Lotto werden 6 Zahlen aus 49 möglichen gezogen. Das ist also eine $6-$elementige Teilmenge einer $49-$elementigen Menge.

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Einsen auf k Plätze zu verteilen ? Für die erste k Möglichkeiten. Dann ist eine 1 verteilt. Für die zweite 1 gibt es noch $k-1$ mögliche Plätze. Für die letzte ($k-$te) 1 bleibt nur noch genau ein Platz übrig. Insgesamt sind das

$$k(k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = k!$$

Möglichkeiten.

Was ist die Anzahl der binären $n-$Tupel mit genau $k-$vielen Einsen? Für die erste 1 gibt es n Möglichkeiten, für die zweite 1 gibt es $n-1$ Möglichkeiten. für die letzte $(k-$te) 1 gibt es noch $n-k+1$. Also insgesamt

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Da aber die Reihenfolge der Einsen egal ist, erhalten wir:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Beispiel: Die Anzahl der 6−elementigen Teilmengen einer 49−elementigen Menge ist

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

Satz: Die Anzahl der ungeordneten Auswahl mit Wiederholung von k Objekten aus einer Menge mit n Objekten ist

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Grund: Wir wählen aus unseren n Objekten k−viele aus.

Haben wir in der Auswahl n_1 Objekte der ersten Art, n_2 Objekte der zweiten Art usw. , so gilt $k = n_1 + \ldots + n_l$.

Wir kodieren das wie folgt. n_1 Einsen danach eine 0. Danach n_2 viele Einsen und wieder eine 0 usw.:

$$\underbrace{11}_{n_1}0\underbrace{111}_{n_2}0\underbrace{11}_{n_3}0...0\underbrace{111}_{n_l}$$

Also haben wir $n-1$ Nullen (als Trennzeichen) und genau k Einsen.

Dies interpretieren wir als binäres $n+k-1$−Tupel. Unter den binären $n+k-1$−Tupeln gibt es aber $\binom{n+k-1}{k}$ viele mit genau k Einsen.

Zusamenfassend ergibt sich die folgende Tabelle:

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
mit Ber. der Reihenfolge	$\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{k-\text{mal}} = n^k$	$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$
ohne Ber. der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!}$