Komplexe Zahlen

Wir betrachten Zahlenpaare $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ und definieren eine Addition und eine Multiplikation wie folgt:

$$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c - b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c)$$

Satz: $\mathbb{R}^2$ mit dieser Addition und Multiplikation erfüllt alle Körperaxiome. Dabei ist $(0,0)$ das additive Neutralelement und $(1,0)$ das multiplikative Neutralelement. Das additive Inverse zu (a,b) ist $(-a,-b)$ und das multiplikative Inverse zu $(a,b) \neq (0,0)$ ist $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Definition: Den obigen Körper der komplexen Zahlen nennen wir $\mathbb{C}$.

Bemerkung: Wir finden die reellen Zahlen in den komplexen Zahlen wie folgt wieder: Wir betrachten die komplexen Zahlen $(a,0)$ und $(b,0)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$. Dann ist mit der komplexen Addition und Multiplikation:

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0) \text{ und } (a,0)\cdot(b,0) = (a\cdot b - 0\cdot 0, a\cdot 0 + 0\cdot b) = (a\cdot b, 0)$$

Wenn wir $1=(1,0)$ und $i=(0,1)$ definieren, so läßt sich jedes Paar (a,b) eindeutig schreiben als

$$(a,b) = a\cdot(1,0)+b\cdot(0,1) = a\cdot 1 + b\cdot i = a + b\cdot i$$

Es ist $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$.

In dieser Schreibweise erhalten wir für die Addition und Multiplikation:

$$a+b\cdot i + c + d\cdot i = a+c+(b+d)\cdot i$$

$$(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i) = a\cdot c - b\cdot d + (a\cdot d + b\cdot c)\cdot i$$

Fazit: Wir können mit komplexen Zahlen im wesentlichen so rechnen, wie wir es gewohnt sind (unter Berücksichtigung von $i^2=-1$).

Bemerkung: Der Körper der komplexen Zahlen kann nicht angeordnet werden. In einem angeordneten Körper gilt $a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$. In $\mathbb{C}$ gilt allerdings $i^2+1^2=0$ und $i,1\neq 0$.

Definition: Für eine komplexe Zahl $z=a+b\cdot i \in \mathbb{C}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ definieren wir

die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} := a - b\cdot i$, den Realteil $Re(z) := a \in \mathbb{R}$, den Imaginärteil $Im(z) := b \in \mathbb{R}$, den Betrag $|z| := \sqrt{a^2+b^2}$

Lemma : Sei $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}. \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

$$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

Grund: Ist $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, so ist

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + bi + c + di} = \overline{a + c + (b+d)i} = a + c - (b+d)i = a - bi + c - di = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

und $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi) \cdot (c - di) = ac - bd - (ad + bc)i = \overline{z_1 \cdot z_2}$.

Die beiden restlichen Aussagen sind klar.

Folgerung: Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ und ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(x)$, also $f(z) = 0$, so gilt:

$$0 = f(z) = \overline{f(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \overline{z}^k$$

Also ist mit z auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von $f(x)$. Komplexe Nullstellen von reellen Polynomen treten also immer paarweise auf.

Lemma: Sei $z = a + b \cdot i, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}},\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.\ |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2},\ Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Grund: Für $z = a + bi$ ist $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$

und $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2}} = \sqrt{z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|$

Definition: Der Abstand zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ ist

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

Lemma: Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,so ist $\frac{z_1+z_2}{2}$ der Mittelpunkt von z_1 und z_2.

Grund: Zunächst ist $\frac{z_1+z_2}{2}$ von z_1 und z_2 gleich weit entfernt:

$\left|\frac{z_1+z_2}{2} - z_1\right| = \left|\frac{z_2-z_1}{2}\right|$ und $\left|\frac{z_1+z_2}{2} - z_2\right| = \left|\frac{z_1-z_2}{2}\right|$.

Und genauer ist: $z_1 + \frac{z_2-z_1}{2} = \frac{2z_1+z_2-z_1}{2} = \frac{z_1+z_2}{2}$

Satz: Der Mittelpunkt der Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist von allen Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt.

Grund: Seien o.E. die komplexen Zahlen $0, a$ und bi die Eckpunkte des Dreiecks. Dann ist der Hypothenusenmittelpunkt

$$\frac{a + bi}{2}$$

Als Mittelpunkt ist er natürlich von den Punkten a und bi gleich weit entfernt. Dieser beträgt $\left|\frac{a+bi}{2}-a\right| = \left|\frac{bi-a}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}$

Der Abstand zu 0 ist

$$\left|\frac{a+bi}{2}-0\right| = \sqrt{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}$$

Satz: Jedes Element von $\mathbb{C}$ ist ein Quadrat.

Grund: Sei $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}i\right)^2 = z$$

Warum diese Multiplikation?

Wenn wir fordern, daß $\mathbb{R}^2$ mit einer Multiplikation zu einem Körper wird und $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ gilt. dann erhalten wir:

$|1| = |1+0\cdot i| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$ und $|i| = |0+1\cdot i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

Weiter ist $|1 \pm i| = |1 \pm 1 \cdot i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Nun ist: $i^2 = a + b \cdot i$

Wegen $|i^2| = |i| \cdot |i| = 1 \cdot 1 = 1$ ist $a^2+b^2 = 1$

Wegen der Körperaxiome gilt aber:

$$(1-i)\cdot(1+i) = 1^2 - i^2 = 1 - a - b\cdot i = (1-a) - b \cdot i$$

Norm bilden auf beiden Seiten liefert:

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{(1-a)^2+b^2} = \sqrt{1-2\cdot a+a^2+b^2} = \sqrt{2-2\cdot a}$

also $\sqrt{2} = \sqrt{1-a}$, mithin $a = -1$, was wiederum, wegen $a^2+b^2=1$, $b=0$ nach sich zieht.

Damit haben wir folgende Multiplikationstabelle:

$\cdot$	1	i
1	1	i
i	i	-1

Für die Multiplikation ergibt sich daher:

$(a\cdot 1 + b \cdot i)\cdot(c \cdot 1 + d \cdot i) = a\cdot c\cdot 1^2 + a \cdot d \cdot 1 \cdot i + b \cdot c \cdot 1 \cdot e + b \cdot d \cdot i^2$

$= (a \cdot c - b \cdot d)\cdot 1 + (a \cdot d + b \cdot c)\cdot i$

(*) **Matrizenrealisierung:** Wir können komplexe Zahlen auch als $2 \times 2-$Matrizen darstellen:

$$z = a + b \cdot i \approx \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+c) & a+c \end{pmatrix}$$

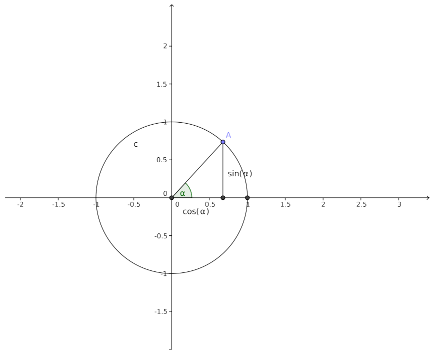
und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

Polarkoordinaten

Jeder Punkt auf dem Einheitskreis, der mit der positiven $x-$Achse den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi]$ einschließt, hat als $x-$Koordinate den Wert $\cos(\alpha)$ und als $y-$ Koordinate $\sin(\alpha)$.

(In der Mathematik und den Naturwissenschaften ist der Vollwinkel 2π, im Alltag normalerweise 360^o).



Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ kann man als Punkt der Ebene betrachten. Dann hat diese Punkt den Abstand $r := \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ zum Nullpunkt und schließt einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit der positiven $x-$Achse ein. Es ist aus elemtargeometrischen Gründen: $a = r \cdot \cos(\varphi)$ und $b = r \cdot \sin(\varphi)$. Wir haben also insgesamt:

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i)$$

Die Größen $|z|$ und φ sind die Polarkoordinaten von z.

Kurzschreibweise:

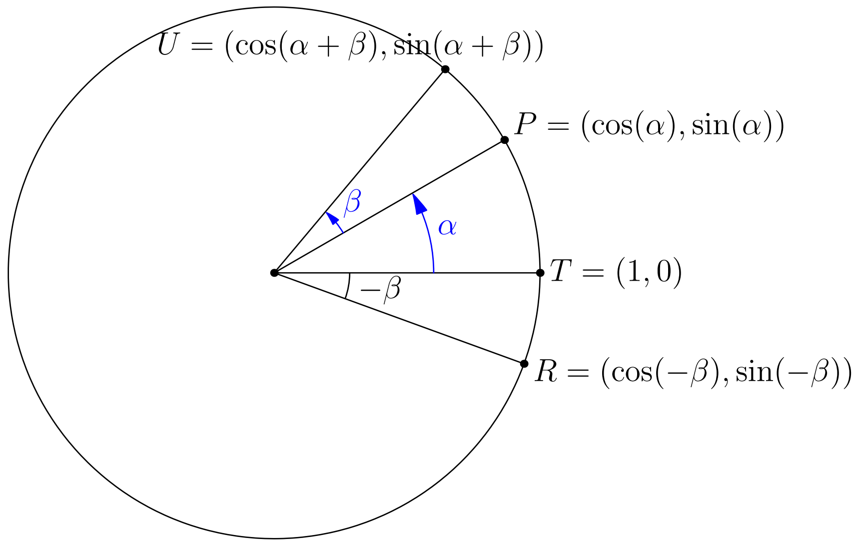
$$e^{i \cdot \varphi} := \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i$$

Additionstheoreme für sin **und** cos**:**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

Grund: Wir betrachten die folgende Konstruktion



Mit den folgenden Bezeichnungen gilt dann

$$\begin{array}{rl} \cos(\alpha) =: p,\ \sin(\alpha) =: q & p^2 + q^2 = 1 \\ \cos(\alpha+\beta) =: u,\ \sin(\alpha+\beta) =: v & u^2 + v^2 = 1 \\ \cos(-\beta) =: r,\ \sin(-\beta) =: s & r^2 + s^2 = 1 \end{array}$$

Es gilt (Drehung um den Winkel β):

$$\overline{UT}^2 = \overline{PR}^2$$

$$\Leftrightarrow (u-1)^2 + v^2 = (p-r)^2 + (q-s)^2$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2u + 1 + v^2 = p^2 - 2pr + r^2 + q^2 - 2qs + s^2$$

$$\Leftrightarrow -2u + 2 = 2 - 2pr - 2qs$$

$$\Leftrightarrow u = pr + qs$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

Die andere Beziehung erhält man aus $\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ und damit $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos(\alpha)$.

Es ist:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (-\beta)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$$

$$= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Aus den Additionstheoremen erhält man:

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} =$$

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \cdot (\cos(\psi) + i\sin(\psi))$$

$$= \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) +$$

$$i(\cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)$$

$$= \cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)$$

$$= e^{i(\varphi+\psi)}$$

Beispiel n-te Einheitswurzeln: Sei $\zeta_n := e^{\frac{2\pi}{n}i}$. Dann gilt:

$$(\zeta_n^k)^n = \zeta_n^{kn} = e^{k\cdot 2\pi i} = \cos(k2\pi) + i\sin(k2\pi) = 1$$

für $k = 1, \ldots, n$.

Fundamentalsatz der Algebra: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$. Dann läßt sich $f(x)$ darstellen als:

$$f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k) \cdot$$

$$(a_1 \cdot (x + b_1)^2 + c_1) \cdot \ldots \cdot (a_l \cdot (x + b_l)^2 + c_l)$$

mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$ und $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j \cdot c_j > 0$

Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die reellen Nullstellen von $f(x)$. Die Faktoren $a_j \cdot (x + b_j)^2 + c_j$ entsprechen den Paaren konjugiert komplexer Nullstellen.

Grund: ohne Begründung

Beispiel: Das Polynom $f(x) = x^3 - 1$ hat offensichtlich in $x = 1$ eine Nullstelle. Division mit Rest liefert: $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$. Dabei ist $(x^2 + x + 1) = ((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})$