0.1 E: Das Nim Spiel

Es gibt n Haufen von Streichhölzern mit den Anzahlen $x_1, \ldots, x_n$. Der Spieler, der am Zug ist darf beliebig viele (aber mindestens eins) Streichhölzer aus einem (und nur einem Haufen) wegnehmen. Derjenige, der das letzte Streichholz nimmt hat gewonnen.

Definition: Die Nimsumme zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{N}_0$ ist wie folgt definiert: Seien $x = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 2^i$ und $x = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i$, $a_i, b_i \in \{0,1\}$ die Binärentwicklungen der beiden Zahlen (die kürzere mit führenden Nullen aufgefüllt, so daß beide gleich lang sind). Wir definieren die folgende Verknüpfung von Nullen und Einsen:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

und $x \oplus y := \sum_{i=1}^{n} (a_i \oplus b_i) \cdot 2^i$.

Beispiel:

	Dezimal	Binär
5	5	101
7	7	111
5+7	2	010

Satz (Eigenschaften von $\oplus$):

Seien x, y, z natürliche Zahlen (inklusive Null), und

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 2^i,\ y = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i,\ z = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot 2^i$$

die Binärentwicklungen.

Definition: Für x und y in der Binärentwicklung heißt

$$x \oplus y := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) 2^i$$

die Nimsumme von x und y.

Eigenschaften

1) $x \oplus y = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i) \cdot 2^i = y \oplus x$ ($\oplus$ ist kommutativ)

2)$(x \oplus y) \oplus z = \sum_{i=0}^{n} [(a_i + b_i) + c_i] \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{n} [a_i + (b_i + c_i)] \cdot 2^i = x \oplus (y \oplus z)$

($\oplus$ ist assoziativ)

3) $x \oplus x = \sum_{i=0}^{n} (a_i \oplus a_i) \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{n} 0 \cdot 2^i = 0.$

Es gilt auch umgekehrt: Ist $x \oplus y = 0$, so ist $x = y$

4) 0 ist Neutralelement: $0 \oplus x = \sum_{i=0}^{n} (0 + a_i) \cdot 2^i = x$

Seien nun $x_{1,}, \ldots, x_n$ die Anzahlen vor dem Zug und $y_1, \ldots, y_n$ die Anzahlen nach dem Zug. Weiter seien

$$s = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$$

und

$$t = y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$$

die Nimsummen der Anzahlen. Wenn der Zug im Haufen k erfolgt ist, gilt:

$t = 0 \oplus t = s \oplus s \oplus t$

$= s \oplus (x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus (y_1 \oplus \ldots \oplus y_n)$

$= s \oplus (x_1 \oplus y_1) \oplus \ldots \oplus (x_n \oplus y_n)$

$= s \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0$

$= s \oplus x_k \oplus y_k$

Also $t = s \oplus x_k \oplus y_k$ (*).

Lemma 1: Ist $s = 0$, so ist $t \neq 0$ unabhängig von der Art des Zuges

Grund: $t = 0 \oplus x_k \oplus y_k = x_k \oplus y_k$ und $x_k \neq y_k$, also ist $t \neq 0$.

□

Lemma 2: Ist $s \neq 0$, dann gibt es einen Zug mit $t = 0$

Grund: Sei d die Position des höchsten Bits $\neq 0$ von s.

Wähle k, so daß das $d-$te Bit von x_k ebenfalls $\neq 0$ ist .

So ein x_k existiert: Wären alle $d-$ten Bits der $x_i = 0$, so auch das $d-$te Bit der Nimsumme s.

Setze: $y_k := s \oplus x_k$ (**). Da x_k die Anzahl der Hölzer vor dem Zug und y_k die nach dem Zug ist, muß noch sichergestellt werden,

daß der Spieler y_k erreichen kann.

Behauptung: $y_k < x_k$

Grund:

Die Situation ist wie folgt: Sei

$$x_k = \sum_{k=d+1}^{n} a_k 2^k + 2^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k 2^k$$

Stelle	n		$d+1$	d	$d-1$	$\ldots$	0
$s =$	0	$\ldots$	0	1	$*$	$\ldots$	$*$
$x_{k=}$	a_n	$\ldots$	a_{d+1}	1	$*$	$\ldots$	$*$
$y_k = s \oplus x_k$	a_n	$\ldots$	a_{d+1}	0	$*$	$\ldots$	$*$

Es ist:

$$y_k = \sum_{k=d+1}^{n} a_k 2^k + 0 + \sum_{k=0}^{d-1} b_k 2^k$$

Es ist also

$$y_k < x_k \;\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{d-1} b_k 2^k < 2^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k 2^k$$

Nun gilt:

$$\sum_{k=0}^{d-1} b_k 2^k \leq \sum_{k=0}^{d-1} 2^k = 2^d - 1 < 2^d \leq 2^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k 2^k$$

Hierbei haben wir verwendet:

$$\sum_{k=0}^{d-1} 2^k = (2-1)(1+2+\ldots+2^{d-1})$$

$$= 2 + 2^2 + \ldots + 2^d - (1+2+\ldots+2^{d-1}) = 2^d - 1$$

□

Fazit: Stellungen mit Nimsumme 0 sind für den Spieler, der an der Reihe ist, Verluststellungen.

Grund: Verloren hat der Spieler, der, wenn er an der Reihe ist, ein leeres Spielfeld (Nimsumme 0) vorfindet.

Sein Gegner kann in allen vorherigen Spielzügen ihm immer eine Situation mit Nimsumme 0 präsentieren, da er immer eine

Nimsumme $\neq 0$ vorfindet.

Beispiel: Das klassische Nimspiel startet mit 3 Haufen mit jeweils 3, 5 und 7 Streichhölzern

Analyse des ersten Zuges: Startnimsumme $011 \oplus 101 \oplus 111 = 001 \neq 0$

2	010	1	001	0	000								
5	101	5	101	5	101								
7	111	7	111	7	111								
$\oplus$	000	$\oplus$	011	$\oplus$	010								
3	011	3	011	3	011	3	011	3	011				
4	100	3	011	2	010	1	001	0	000				
7	111	7	111	7	111	7	111	7	111				
$\oplus$	000	$\oplus$	111	$\oplus$	110	$\oplus$	101	$\oplus$	100				
3	011	3	011	3	011	3	011	3	011	3	011	3	011
5	101	5	101	5	101	5	101	5	101	5	101	5	101
6	110	5	101	4	010	3	011	2	010	1	001	0	000
$\oplus$	000	$\oplus$	011	$\oplus$	100	$\oplus$	101	$\oplus$	100	$\oplus$	111	$\oplus$	110

Für den ersten Spieler ist es also möglich, durch Wegnehmen eines einzigen Streichholzes aus einem der drei Haufen, seinem Gegner eine Nimsumme 0 zu präsentieren. Der der anfängt, gewinnt also (wenn er richtig spielt). Zum praktischen Spiel ist es nützlich zu wissen, daß folgende Konstellationen Nimsumme 0 haben: zwei gleiche Reihen, 1-2-3, genau einer fehlt (unabhängig von der Reihenfolge). Sind das alle?

Wir betrachten die Nimsumme von drei Zahlen:

$$\begin{matrix} 0 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

In jedem Fall muß $b_1 = c_1$ sein.Ist $a = 0$, so muß $b = c$ sein. Ist $a = 3$, so muß $b_1 = c_1$, $b_2 \neq c_2$, $b_3 \neq c_3$. Dies liefert die Zahlentripel (3,3,0),(3,1,2) und (3,4,7),(3,5,6), welche unter die beschriebenen Fälle fallen. Ist $a = 2$, erhalten wir (2,3,1),(2,0,2),(2,7,5),(2,4,6). Ist $a = 1$, erhalten wir schließlich (1,1,0),(1,2,3),(1,5,4). Es fehlten also noch die Fälle (2,4,6) und (1,5,4).