0.1 E: Rechenschieber

Rechnen mit Linealen

Um das Grundprinzip eines Rechenschiebers zu verstehen, stellen wir uns zunächst zwei gegeneinander verschiebbare Lineare vor.

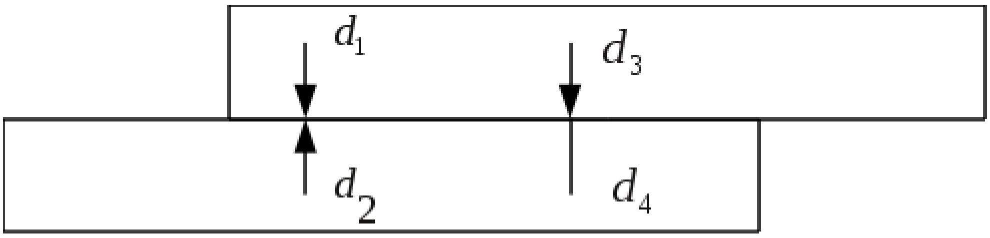
Wir bringen durch Verschiebung die beiden Zahlen d_1 und d_2 auf den beiden Linealen zur Deckung:

Lesen wir nun unter d_3 auf dem oberen Lineal den Wert d_4 ab, so gilt:

$$d_3 - d_1 = d_4 - d_2$$

oder

$$d_4 = d_3 - d_1 + d_2$$



Speziell gilt, falls $d_1 = 0$ ist:

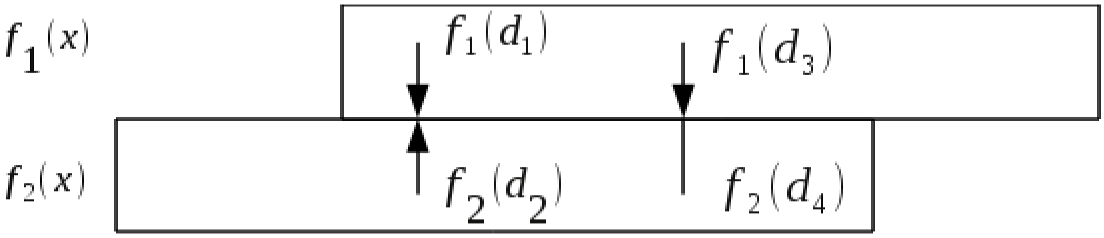
$$d_4 = d_3 + d_2 \text{ und } d_2 = d_4 - d_3$$

Sind nun auf beiden Skalen nicht die Werte d_i selbst abgetragen, sondern Funktionen $f_1(x)$ bzw.. $f_2(x)$, so gilt also

$$f_2(d_4) - f_2(d_2) = f_1(d_3) - f_1(d_1)$$

oder

$$d_4 = f_2^{-1}\left(f_1(d_3) - f_1(d_1) + f_2(d_2)\right)$$



Die allgemeine Potenzfunktion

Wir hatten für den natürlichen Logarithmus gesehen:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Es ist exp die Umkehrfunktion von ln:

$$\ln(\exp(x)) = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\exp(\ln(x)) = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Insbesondere gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Grund: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig und $x = \ln(a)$, $y = \ln(b)$. Dann gilt:

$$\exp(x + y) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab = \exp(x)\exp(y)$$

Definition der allgemeinen Potenzfunktion: Für $a > 0$ definieren wir:

$$a^x := \exp\left(x \ln(a)\right)$$

und

$$x = \log_a y \ :\Leftrightarrow \ y = a^x$$

Bemerkung: 1) Speziell gilt:

$$\ln(a^x) = \ln(\exp(x \ln(a)) = x \ln(a)$$

2) Zwei Logarithmusfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Multiplikative Konstante: Sei $y = a^x$, dann ist

$$\frac{\ln(y)}{\log_a(y)} = \frac{x \ln(a)}{x} = \ln(a)$$

Satz:

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

Grund: Ist $x = a^{z_1}$und $y = a^{z_2}$, so gilt:

$$z_1 + z_2 = \log_a(x) + \log_a(y)$$

und

$$a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1 + z_2} \text{ also } \log_a(xy) = z_1 + z_2$$

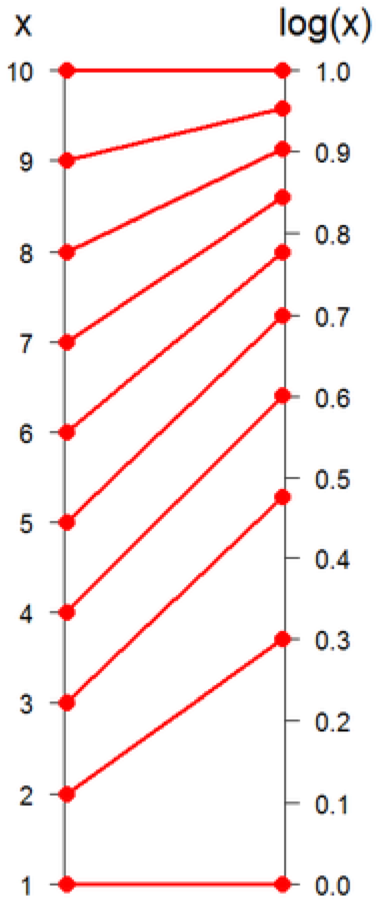
Weiter gilt:

$$\log_a(x^y) = \ln(a) \cdot \ln(x^y) = y \cdot \ln(a)\ln(x) = y\log_a(x)$$

Definition:

$$\mathrm{ld}(x) := \log_2(x)$$
$$\log(x) := \log_{10}(x)$$

Beispiel:



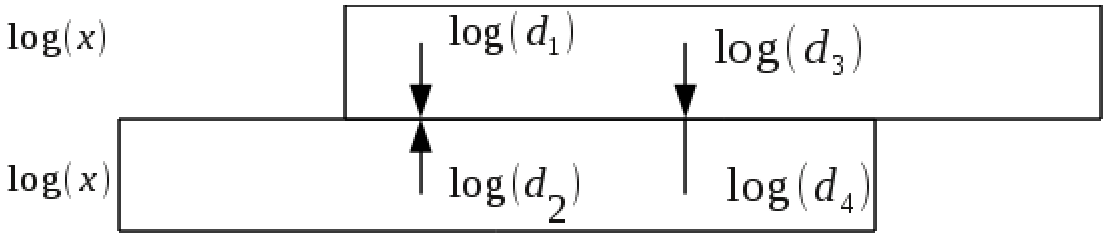
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log(x)$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\log(x)$	1	1.301	1.477	1.602	1.699	1.778	1.845	1.903	1.954	2

x	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\log(x)$	2	2.301	2.477	2.602	2.699	2.778	2.845	2.903	2.954	3

Der logarithmische Rechenschieber

Beim logarithmischen Rechenschieber sind auf beiden Skalen $\log(x)$ aufgetragen (der Abstand vom linken Rand ist $D(x) := \log(x)$)



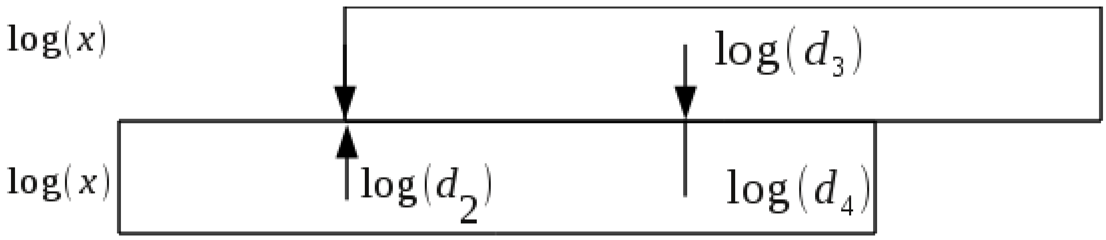
Daher gilt:

$$d_4 = 10^{\log(d_3) - \log(d_1) + \log(d_2)} = 10^{log\left(\frac{d_3 \cdot d_2}{d_1}\right)} = \frac{d_2 \cdot d_3}{d_1}$$

Speziell mit $d_1 = 1$ (also $\log(d_1) = 0$):

$$d_4 = 10^{\log(d_3) + \log(d_2)} = 10^{\log(d_3 \cdot d_2)} = d_3 d_2$$

Logarithmische Rechenschieber können also multiplizieren



und dividieren

$$\log\left(\frac{d_4}{d_3}\right) = \log(d_2)$$

Definition: (Wissenschaftliche Notation von Dezimalzahlen) Jede Zahl $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ läßt sich auf eindeutige Weise schreiben als:

$$x = b_0.b_1 b_2 b_3 \ldots \cdot 10^k$$

mit $b_0 \in \{1, \ldots, 9\}$ und $b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, also genau einer Ziffer $\neq 0$ vor dem Komma und abschließender Verschiebung des Kommas um k Stellen nach rechts.

Anwendung: Seien $x = x_0.x_1 x_2 \ldots \cdot 10^{k_1}$ und $y = y_0.y_1 y_2 \ldots \cdot 10^{k_2}$. Wir setzen $x_r := x - x_0$ und $y_r := y - y_r$. Dann ist

$$xy = (x_0 + x_r) \cdot 10^{k_1} \cdot (y_0 + y_r) \cdot 10^{k_2}$$

$$= (x_0 y_0 + x_0 y_r + y_0 x_r + x_r y_r) \cdot 10^{k_1 + k_2}$$

Wegen $1 \leq x_0, y_0 \leq 9$ gilt $1 \leq x_0 y_0 \leq 81$ und da zusätzlich $0 \leq x_r, y_r \leq 1$ gilt, haben wir $0 \leq x_0 y_r, x_r y_0 \leq 9$ und $0 \leq x_r y_r \leq 1$. Insgesamt erhalten wir:

$$1 \cdot 10^{k_1 + k_2} \leq xy \leq (81 + 9 + 9 + 1) \cdot 10^{k_1 + k_2} = 100 \cdot 10^{k_1 + k_2}$$

und hiermit::

$$k_1 + k_2 \leq \log((x_0 + x_r)(y_0 + y_r)) + k_1 + k_2 \leq 2 + k_1 + k_2$$

bzw.

$$0 \leq \log(x_0.x_1 x_2 \ldots \cdot y_0.y_1 y_2 \ldots) \leq 2$$