0.1 E: Stetigkeit

Erinnerung: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ ist in $a \in D$ stetig, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

f ist stetig (schlechthin), wenn f in jedem $a \in D$ stetig ist.

Anders gesagt: f ist in a genau dann stetig, wenn $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für x nahe bei a.

Beispiele: i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $x \mapsto x$ ist überall stetig

Grund: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \varepsilon$. Ist nun $|x - a| < \delta = \varepsilon$, so ist $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$

ii) $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist überall stetig

Grund: Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta := \sqrt{\varepsilon}$

1. Fall: $x > a$. Dann gilt: $\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)^2 = x - 2\sqrt{xa} + a \leq x - 2a + a = x - a$. Daher ist $\sqrt{x} - \sqrt{a} \leq \sqrt{x - a}$. Ist also $|x - a| \leq \delta$, so ist $\sqrt{x} - \sqrt{a} \leq \sqrt{x - a} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$.

Der Fall $x \leq a$ verläuft analog.

iii) Die Funktion $\operatorname{sgn}(x)$ ist nicht stetig in 0, da $|f(x) - f(0)| \geq 1$ für $x \neq 0$.

iv) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist in 0 nicht stetig.

Grund: Wir betrachten die Punkte $x_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi}$. Es ist $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und wegen der $2\pi-$Periodizität des Sinus gilt $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Nun wird x_n beliebig klein. Also findet man beliebig nahe bei 0 ein x_{n_0}. Aber $|\sin\left(\frac{1}{x_{n_0}}\right) - sin(0)| = 1$, wird also nicht beliebig klein.

v) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ ist stetig

Grund: Sei $0 \leq x \leq a$. Dann ist $|x^n - a^n| = (a^n - x^n) = (a - x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + \ldots + ax^{n-2} + x^{n-1}) \leq |a - x| \cdot (n + 1) \cdot a^{n-1}$. Dieser Ausdruck wird beliebig klein für x nahe beia. Alle anderen Fälle gehen analog.

vi) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig in allen Punkten $a \neq 0$

Grund: Es ist

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x}{ax}\right|$$

Ist $|x| > \frac{|a|}{2}$, so gilt:

$$\left|\frac{a - x}{ax}\right| < |x - a| \cdot \frac{2}{|a|^2}$$

Letzteres wird offenbar beliebig klein für x nahe bei a.

Satz: Sind $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so ist auch $f + g : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Grund: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_1, \delta_2 > 0$, so daß $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. Dann gilt:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(a)| = |f(x) - f(a) + g(x) - g(a)|$$

$$\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Satz: Sei f wie im vorigen Satz, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist λf stetig.

Grund: Ist $\lambda = 0$, so ist das trivialerweise richtig. Sei also $\lambda \neq 0$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, mit $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Es ist also $|\lambda f(x) - \lambda f(a)| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$

Bemerkung: Die letzten beiden Sätze zeigen, daß die stetigen Funktionen (mit gemeinsamer Definitionsmenge) einen Vektorraum bilden.

Folgerung: Jedes Polynom definiert eine stetige Funktion.

Satz: Sind $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so auch $f \cdot g$.

Grund: Es ist

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)$$

$$= g(x)(f(x) - f(a)) + f(a)(g(x) - g(a))$$

Wähle $\delta_1 > 0$, so daß $|f(a)(g(x) - g(a))| < \epsilon/2$ für alle $x \in D$, mit $|x-a| < \delta_1$. Weiter wählen wir $\delta_2 > 0$, so daß $|g(x) - g(a)| < 1$ ist für alle $x \in D$, mit $|x-a| < \delta_2$. Folglich gilt: $|g(x)| < |g(a)| + 1$ für alle $x \in D$, mit $|x-a| < \delta_2$. Zum Schluß wählen wir δ_3, so daß $|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2|g(a)|+2}$ für alle $x \in D$, mit $|x-a| < \delta_3$ gilt. Insgesamt haben wir dann:

$$|g(x)(f(x) - f(a)) + f(a)(g(x) - g(a))|$$

$$\leq |g(x)||f(x) - f(a)| + |f(a)||g(x) - g(a)|$$

$$< (|g(a)| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2(|g(a)| + 1)} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

für alle $x \in D$, mit $|x-a| < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Satz: Ist $f(x)$ stetig in a und $g(x)$ stetig in $b = f(a)$, so ist $g(f(x))$ stetig in a.

Grund Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, mit $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ falls $|y-b| < \delta$. Mit $y = f(x)$ und $b = f(a)$ gibt es ein $\kappa > 0$ mit:

$$|f(x) - f(a)| = |y - b| < \delta$$

für $|x-a| < \kappa$.

Folgerung: Sind f, g in a stetige Funktionen und ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f(x)}{g(x)}$ in a stetig.

Grund: Ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{1}{g(x)}$ stetig in a (als Kompositum der stetigen Funktionen $\frac{1}{x}$ und $g(x)$) und damit ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

stetig in a, als Produkt stetiger Funktionen in a.

Satz: Ist eine Funktion f in einem Punkt a differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Grund: Es ist $f(x) = f(a) + \omega(x)(x-a)$ mit einer in a stetigen Funktion ω und $\omega(a) = f'(a)$. Damit ist f als Kompositum von in a stetigen Funktionen selber wieder stetig.

Korollar: $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x und $\ln(x)$ sind, als differenzierbare Funktionen, stetig.

Satz: Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und ist $f(c) > 0$ für ein $c \in (a,b)$, so ist $f(x) > 0$ für x nahe c.

Grund: Sei $d := f(c)$. Dann ist $|f(x) - d| < \frac{d}{2}$ für x nahe bei c. Also $0 < \frac{d}{2} = d - \frac{d}{2} < f(x) < d + \frac{d}{2}$.

Flächenfunktionen streng monotoner Funktionen sind stetig

Grund: Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend und $a < x$. Dann gilt für eine Flächenfunktion F von f:

$$f(a)(x-a) < F(x) - F(y) < f(x)(x-a)$$

Abziehen von $f(a)(x-a)$ liefert

$$0 < F(x) - F(a) < (f(x) - f(a))(x-a) < (f(d) - f(c))(x-a)$$

Die rechte Seite wird beliebig klein für $x$nahe bei a, also auch der Ausdruck $F(x) - F(a)$.

Bemerkung: Die Flächenfunktion F ist also auch dann stetig in einem Punkt a, wenn f in a einen Sprungpunkt hat.

Satz(Nullstellensatz von Bolzano): Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und ist $f(a) < 0 < f(b)$, so gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $f(c) = 0$.

Grund: Wir betrachten $A := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}$. Dann ist A oben beschränkt (durch b) und wegen $a \in A$ ist $A \neq \emptyset$. Also existiert $\alpha = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Sicher gilt für jede Teilmenge $B \subset [a,b]$, da alle oberen Schranken für $[a,b]$ auch obere Schranken für B sind: $\sup B \leq b$. Also ist $\alpha \leq b$. Wäre $f(\alpha) > 0$, so wäre auch $f(x) > 0$ für ein Intervall $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Sei $x_0 \in (\alpha - \delta, \alpha)$. Dann ist aber x_0 keine obere Schranke von A mehr und es existierte $x_1 \in A$, mit $x_1 > x_0$. Also gälte $x_0 < x_1 < \alpha$, also $x_1 \in (\alpha - \delta, \alpha)$, mithin $f(x_1) > 0$ im Widerspruch zu $x \in A$. Also ist $f(\alpha) \leq 0$. Wäre nun $f(\alpha) < 0$, so auch $f(x) < 0$ für x_0 nahe bei α und $x_0 > \alpha$, also $x_0 \in A$ und $x_0 > \alpha$ und damit im Widerspruch dazu, daß α obere Schranke von A ist. Also ist $f(\alpha) = 0$, was wiederum $\alpha \neq a, b$ impliziert.

Zwischenwertsatz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann wird jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ angenommen.

Grund: Ist $f(a) = f(b)$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $f(a) \neq f(b)$. Für y echt zwischen $g(a)$ und $g(b)$ definieren wir $g(x) := \frac{f(x)-y}{f(b)-f(a)}$. Dann hat g in a und b verschiedenes Vorzeichen. Also gibt es eine Nullstelle von g zwischen a und b. Diese sei c. Dann ist $f(c) = y$.

Bemerkung: Der Nullstellensatz von Bolzano ist ein Satz, der stark von den Eigenschaften der reellen Zahlen abhängt: Betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x^2 - 2$$

so ist $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$ aber f hat keine Nullstelle im Intervall $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$!

Satz von Weierstraß: Ein stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt auf dem (kompakten) Intervall $[a, b]$ ein Minimum und ein Maximum an.

Grund: ohne Begründung